Freie wissenschaftliche Arbeit zur Erlangung des Grades eines Diplom-Soziologen an der Sozialwissenschaftlichen Fakultät der Ludwig-Maximilians-Universität zu München

Einer ist immer der Loser

Eine spieltheoretische Analyse von Elfmeterschüssen

Eingereicht von:
cand. rer. pol. Rupert Hammer
Breisacherstr. 14 RGB, 81667 München

Referent:
Prof. Norman Braun, Ph. D.

München, 4. Januar 2006

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich sehr herzlich bei Herrn Holger Rahlfs und Herrn Jörn Wendland von der IMP AG München Ismaning für die Kooperation und die Bereitstellung des in dieser Arbeit verwendeten Datensates bedanken.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Elfmeterschießen! Es gibt wohl kaum einen spannenderen Moment in einem Fußballspiel als den, wenn sich der Torhüter und der Schütze gegenüberstehen, um den Elfmeter auszuführen. Aus diesem Grund widmet die Fußball-Zeitschrift "11 FREUNDE Magazin für Fußball-Kultur" dieser Situation ein ganzes Heft[1]. Im Vorwort ist zu lesen, dass Triumph und Tragik beim Fußball selten so eng beieinander liegen wie beim Elfmeter. So ist der Schütze oftmals zu Tode betrübt, wenn er den Elfmeter verschossen hat, während der Torhüter gefeiert wird, falls er den Schuss hält.

In diesem Zusammenhang stellt sich die Frage, wie beide Spieler (Schütze und Torhüter) es schaffen können, möglichst oft auf der Gewinnerseite zu stehen. Zwar kann es in jeder konkreten Situation jeweils nur einen Gewinner geben, jedoch stehen die Spieler im Laufe ihrer Karriere immer wieder am Elfmeterpunkt[2] bzw. auf der Torlinie, was sie dazu bewegt, über die Zeit hinweg ein für sie optimales Erfolgsverhältnis zu erreichen. Im Vergleich zum Schützen hat der Torhüter eine geringere Erfolgswahrscheinlichkeit, aber auch der Torhüter wird versuchen, diese zu optimieren. Der Anreiz hierzu ist im Besonderen bei professionellen Fußballspielern gegeben.

[1] Nr. 48, Oktober 2005

[2] Der Elfmeterpunkt wurde erst 1902 eingeführt. Zuvor wurde von einer Linie, die 12 Yards ($\approx$ 11 Meter) vor dem Tor quer über den Platz gezogen wurde, geschossen.

1.1 Zielsetzung

Die Analyse des Verhaltens von professionellen Fußballspielern ist Gegenstand der vorliegenden Arbeit. Genauer soll gezeigt werden, ob es diesen Akteuren möglich ist, sich in der konkreten Situation des Elfmeters, optimal zu verhalten.
Den theoretischen Rahmen bildet hierfür die Spieltheorie. Sie ist in der Lage, Situationen abzubilden, die dadurch gekennzeichnet sind, dass sich die Erwartungen und das Verhalten der an der Situation beteiligten Akteure jeweils gegenseitig beeinflussen (vgl. Sieg 2005). Dieser Umstand ist in der Elfmetersituation gegeben. Beide Spieler versuchen so zu agieren, dass ein für sie optimales Ergebnis erreicht wird. Jedoch haben die Spieler ein völlig konträres Interesse am Ausgang des Spiels Elfmeterschießen. Der Schütze versucht zu treffen, während der Torhüter versucht, dies zu verhindern. Die Spieler befinden sich also in einer strategischen Entscheidungssituation, deren Analyse Gegenstand der Spieltheorie ist (vgl. Holler&Illing 2000).
Das Minimax-Theorem (v. Neumann 1928) stellt einen Lösungsweg einer solchen strategischen Situation bereit. Es beinhaltet zwei Verhaltensypothesen, die erfüllt werden sollten, wenn sich die Spieler im Sinne der Spieltheorie rational verhalten wollen, um ein optimales Ergebnis zu erreichen. Der Test, ob die Spieler den Vorgaben der Theorie tatsächlich folgen können und so ein optimales Ergebnis erzielen, wird im empirischen Teil der Arbeit vollzogen.
Als Datengrundlage dienen 1043 Elfmetersituationen aus der ersten Deutschen Fußball-Bundesliga.

1.2 Aufbau der Arbeit

Diese Arbeit ist in fünf Kapitel untergliedert.
Nach der oben gegebenen Einführung und Darstellung der Zielsetzung der Arbeit wird nun der folgende Aufbau der Arbeit kurz dargelegt.
Das zweite Kapitel setzt den theoretischen Rahmen der Arbeit, wobei zunächst auf die Spieltheorie und ihre Annahmen im Allgemeinen eingegangen wird, um auf die Darstellung des speziellen Gebiets der Nullsummenspiele und ihre Lösung hinzuleiten.

Kapitel 3 widmet sich der Vorstellung des Stands der Forschung zum Thema. Zudem werden hier die zentralen Hypothesen, die auch schon Gegenstand der Testung in den vorgestellten Studien waren, aufgezeigt.
Die Testung dieser Hypothesen erfolgt im empirischen Teil dieser Arbeit (Kapitel 4). Die gebrauchten Test-Verfahren werden hier kurz erläutert, um dann an den gegebenen Daten angewendet zu werden.
Das abschließende fünfte Kapitel fasst die Ergebnisse dieser Arbeit noch einmal zusammen und bietet zudem einen Ausblick auf mögliche, weiterführende Forschungsfragen.

Kapitel 2

Theoretischer Hintergrund

In diesem Kapitel sollen die den empirischen Analysen zu Grunde gelegten theoretischen Annahmen dargelegt werden. Im ersten Schritt wird auf die Spieltheorie im Allgemeinen eingegangen. Im Fortgang wird die Unterscheidung zwischen kooperativer und nicht-kooperativer Spieltheorie getroffen, um im letzten Abschnitt auf den 'Sonderfall' des sog. Nullsummen-Spiels einzugehen.

2.1 Spieltheorie allgemein

Grundlegend kann gesagt werden, dass sich die Spieltheorie[1] mit Entscheidungssituationen in denen sich Akteure befinden beschäftigt. Nach Davis (1993:15) ist es das Ziel der Spieltheorie zu untersuchen, wie Entscheidungen getroffen werden sollten und zu einem gewissen Grad auch wie sie tatsächlich getroffen werden. Diese Entscheidungen werden jedoch nicht isoliert betrachtet. Vielmehr geht es der Spieltheorie darum, zu zeigen, wie die Entscheidungen eines Individuums seine Umwelt— und damit auch die Entscheidungen anderer Akteure— verändern und beeinflussen können. Diese Veränderungen der Umwelt haben jedoch rückwirkend wiederum Einfluss auf die Entscheidungssituation in der sich der Akteur befindet. Genauer lässt sich sagen, dass die 'Untersuchungseinheiten', also die

[1]Der Begriff *Spieltheorie* geht auf J. von Neumanns (1928) Artikel "Zur Theorie der Gesellschaftsspiele" zurück, in dem er einen mathematischen Formalismus entwickelt, um Entscheidungsprobleme darzustellen und zu lösen.

Spieler Entscheidungen in wechselseitiger Abhängigkeit zu treffen haben. Dies wird insbesondere deutlich, wenn die Akteure versuchen, sich in ihrem Sinne *optimal* zu verhalten und ihren Nutzen zu maximieren. In diesem Fall ist die

> "individuell optimale Entscheidung nicht mehr nur das Ergebnis eines simplen Optimierungskalküls, sondern abhängig vom Verhalten anderer und benötigt deshalb eine Vorstellung von deren Entscheidungskalkül"(Amann 1999:3).

Die Spieltheorie befasst sich also im weitesten Sinne mit der Interaktion von Akteuren.
Zu diesem Zweck bedient sich die Spieltheorie der Bildung von Modellen. Die Nützlichkeit von mathematischen Modellen in den Sozialwissenschaften hängt jedoch von der Präzision der Modellierung ab, wobei eine präzise Modellierung immer durch Selektivität gekennzeichnet ist (vgl. Shubik 1982). Es werden immer nur bestimmte Aspekte betrachtet, die relevant erscheinen, während andere aus Gründen der Vereinfachung unberücksichtigt bleiben.
Wie gut ein Modell 'passt' hängt genauso davon ab, was weggelassen wird, wie davon, was in die Modellierung aufgenommen wird. So werden oft gewisse Annahmen vorausgesetzt, die das Verhalten des Systems beeinflussen können. Diese Annahmen sollten aber, auf Grund ihrer Wichtigkeit herausgestellt und somit ebenfalls einer Untersuchung zugänglich gemacht werden.
Modelle in Form von Spielen haben, wie oben angedeutet, multilaterale Entscheidungen zum Untersuchungsgegenstand. Sie stellen eine mathematische Basis zur Erklärung von menschlicher Interaktion aus dem Blickwinkel strategischer Möglichkeiten dar.
Um dies leisten zu können, müssen folgende grundsätzlichen Fragen einer spieltheoretischen Analyse eines Sachverhalts beantwortet werden können: Welches sind die Grenzen, die ein Modell definieren? Wer sind die Entscheidungsträger und wie frei sind sie in der Wahl ihrer Aktionen? Wie gestalten sich die Regeln des Spiels und wie werden sie auf eine systematische Beschreibung reduziert? (Shubik 1982:4)
Sind diese Fragen geklärt, so kann das Spiel beginnen. Hierzu ist es notwendig,

dass mindestens zwei Parteien am Spiel beteiligt sind[2]. Diese Parteien werden im folgenden Spieler genannt. Die Spieler müssen nun eine Entscheidung treffen, bzw. eine Strategie[3] wählen, welche eine bestimmte Konsequenz mit sich bringt. Diese Konsequenz wiederum wird ‘Auszahlung’ oder synonym ‘Payoff’ genannt.

2.1.1 Formen des Spiels

Grundsätzlich kann ein Spiel in zwei verschiedenen Formen dargestellt werden. Zum einen kann es in seiner extensiven Form abgebildet werden, zum anderen aber auch in seiner Normal- oder strategischen Form. Erstere Darstellung beschreibt das Spiel in der Form eines Spiel-Baumes, während zweitere die zur Verfügung stehenden reinen Strategien und die damit verbundenen Payoffs der Spieler in Form einer Matrix präsentiert[4].

> “The normal form rests upon the notion of a (pure) strategy, which may be thought of as a complete contingency plan that specifies a particular choice for a player in every situation that might arise in a game”(Zagare 1984:16).

Zusätzlich zeigt die Normalform die Spieler, welche am Spiel beteiligt sind. Eine genaue Beschreibung der Spieler ist zum einen durch die Payoff-Funktionen der einzelnen Spieler gegeben, zum anderen durch Annahmen bezüglich des Wissens

[2]Da es sich beim zu untersuchenden Sachverhalt ebenfalls um ein Zwei-Personen-Spiel handelt, beziehen sich alle weiteren Ausführungen immer auf den Zwei-Personen-Fall. Allerdings steht für die meisten Spiele auch für den n-Personen-Fall eine Lösung bereit.

[3]Das Konzept einer *Strategie* geht auf J. von Neumann (1928) zurück.

> “If the number of choices open to each player is finite, and if there is a termination rule which guarantees that the game ends in a finite number of moves, then the total number of situations that can occur in a play of a game is also finite, although it may be very large. A strategy is defined as a set of specifications that a player can make concerning his choice in every situation that may conceivably occur” (Rapoport et al. 1976:5).

[4]Im Folgenden wird die Darstellung des Spiels in Normalform gebraucht.

der Spieler und durch die Annahme der Rationalität aller Spieler. Jeder Spieler versucht seinen Nutzen zu maximieren, wobei das Ergebnis des Spiels nicht nur von seiner eigenen, sondern eben auch von der Wahl seines Gegners[5] abhängt (vgl. Luce& Raiffa 1957:55). Abbildung 2.1 zeigt ein Spiel in Normalform.

Abbildung 2.1: Spiel in Normalform

		Spieler2	
		L	R
Spieler1	L	(a,b)	(c,d)
	R	(e,f)	(g,h)

2.1.2 Klassifikation von Spielen

Strategische Spiele können in einer Vielzahl von Formen und Zusammenhängen auftreten. Deshalb ist es sinnvoll, sie anhand einiger zentraler Kriterien zu klassifizieren.
Dixit& Skeath (2002) wählen hierzu sechs Kategorien, nach welchen Spiele eingeteilt werden können.

Abfolge der Züge

Die erste Kategorie bezieht sich hierbei auf die Sequentialität der Züge, die die Spieler vollziehen. So unterscheiden sich Spiele danach, ob die Spieler nach der Reihe, oder simultan ziehen. Wird der Reihe nach gezogen, so stellt sich für die Spieler die Frage nach der Antwort auf den Zug des Gegners. Zudem müssen die

[5] Die Spieltheorie hat nicht nur Spiele zum Gegenstand, in denen sich die Spieler als Gegner gegenüberstehen. Vielmehr können auch Spiele analysiert werden, in denen die Spieler miteinander kooperieren.

zukünftigen Züge des Gegners mit in das Kalkül aufgenommen werden.
Ziehen die Spieler jedoch simultan, erfordert dies eine andere Herangehensweise an die zu treffenden Überlegungen. In diesem Fall nämlich ist es notwendig, dass sich die Spieler Gedanken darüber machen, wie sich der Gegner—zeitgleich zur eigenen Entscheidung—entscheiden wird. Erschwerend kommt hinzu, dass sich der Gegener ebenfalls diese Gedanken macht, was wiederum zu einem "Kreislauf der Gedanken" führt, aus dem es gilt auszubrechen, um zu einer Lösung des Spiels zu gelangen.

Interessen der Spieler

Diese Kategorie wird herangezogen, um Spiele nach der Interessenlage der teilnehmenden Spieler zu unterscheiden. Auf der einen Seite gibt es Spiele, in denen sich die Interessen der einzelnen Spieler diametral gegenüberstehen, wenn es darum geht, eine konstante Menge von Auszahlungswerten unter den Spieler aufzuteilen. Diese Spiele werden Konstantsummen-Spiele genannt. Ein Spezialfall dieser Spiele stellt das Nullsummen-Spiel dar. Hier bedeuten die Gewinne des einen Spielers die Verluste des anderen Spielers.
Auf der anderen Seite gibt es aber auch Spiele, bei denen die Spieler ein Interesse daran haben, miteinander zu kooperieren, um so die besten möglichen Payoffs für sich zu sichern.

Wiederholung von Spielen

Unterschiede zwischen Spielen können gegeben sein durch die Anzahl, wie oft das Spiel gespielt wird. So mögen die Entscheidungen der Spieler anders ausfallen, wenn sie wissen, dass sie das gleiche Spiel nur ein- oder mehrmals spielen werden. In diesem Kontext ist es zudem von Bedeutung, ob das Spiel bei einer Wiederholung mit dem gleichen, oder einem anderen Gegner bzw. Partner gespielt wird.
In einem einmaligen Spiel haben die Spieler keine Informationen übereinander, während es im Verlauf von mehrmaligen Spielen möglich ist, Informationen über den Gegner zu sammeln. Außerdem kann es sein, dass sich die Struktur eines Spiels im Zeitablauf verändert. Beispielsweise wäre es zunächst sinnvoll, mit dem Gegner zu kooperieren, um dann zu einem späteren Zeitpunkt zu defektieren und

somit einen größeren Gewinn zu machen, als dies bei sofortiger Defektion möglich gewesen wäre.

Information

Ein weiteres Klassifikationskriterium bezieht sich auf die Informationen, über die die Spieler verfügen. Zum einen können die Spieler auf gleiche Informationen zurückgreifen, zum anderen können Informationsasymmetrien vorherrschen. In diesem Falle ist davon auszugehen, dass der bevorteilte Spieler seinen Informationsüberschuß in der einen oder anderen Weise ausnutzen wird, um sich besser zu stellen. Zudem kann zwischen Spielen mit vollständiger und unvollständiger Information unterschieden werden. Erstere sind dadurch gekennzeichnet, dass die Spieler wissen, welche Spieler am Spiel beteiligt sind, welche Strategien den Spielern zur Verfügung stehen und welche Payoffs mit den gewählten Strategien einhergehen. Sind eine oder mehrere dieser Bedingungen nicht erfüllt, wird das Spiel als Spiel mit unvollständiger Information bezeichnet (vgl. Friedman 1991:11).

Regeln des Spiels

Die Regeln eines Spiels beinhalten folgende Komponenten: (1) eine Liste aller Spieler, (2) die Strategien, aus welchen die Spieler wählen können, (3) die Payoffs die die Spieler unter allen Kombinationen der gewählten Strategien erzielen können und (4) die Annahme, dass es sich bei den Spielern um rationale Maximierer handelt (vgl. Dixit& Skeath 2002:29). In diesem Zusammenhang wird unter der "common knowledge" das, allen Spielern gemeinsame, Verstehen der Regeln zusammengefasst. Dies hat zur Folge, dass die Spieler in ihre Überlegungen aufnehmen müssen, dass alle Spieler wissen, dass alle Spieler wissen usw.. Es ergibt sich also ein infiniter Regress. An diesem Punkt gibt sich die Spieltheorie jedoch damit zufrieden, dass alle Spieler das gleiche Verständnis der Regeln des Spiels haben.
Bei der Interpretation der Regeln als Unterscheidungskriterium handelt es sich um die Unterscheidung der Spiele danach, ob die Regeln des Spiels fixiert sind, oder ob sie manipulierbar sind. Dies ist von Bedeutung, wenn es innerhalb eines

Spiels z.B. gestattet ist, Drohungen oder Versprechen zu machen.

Kooperation

Kooperative und nicht-kooperative Spiele bilden die beiden Pole des letzten Unterscheidunsmerkmals ab. Der zugrundeliegende 'Mechanismus' ist hierbei die Durchsetzbarkeit von Abstimmungen der Spieler untereinander. Sind sie durchsetzbar, so handelt es sich um die Klasse der kooperativen Spiele. Sind sie jedoch nicht durchsetzbar, so fallen alle diejenigen Spiele in die Klasse der nicht-kooperativen Spiele.

2.1.3 Das zu untersuchende Spiel

Nach der oben getroffenen Klassifikation handelt es sich im hier zu untersuchenden Spiel—dem Elfmeterschießen im Fußball— um ein einmaliges[6] Zwei-Personen-Nullsummen-Spiel in strategischer Form. Die Spieler wählen ihre Strategie simultan, wobei die jeweiligen Interessen der Spieler vollauf konfligieren. Beiden Spielern steht die vollständige Information zu Verfügung wobei davon ausgegangen wird, dass die Regeln[7] des Spiels 'common knowledge' und nicht veränderbar sind. Zudem fällt dieses Spiel unter die Kategorie der nicht-kooperativen Spiele, da es den Spielern in diesem Fall nicht möglich ist, sich durch eine Kooperation miteinander besser zu stellen.
Die Spieler haben jeweils die Wahl zwischen den beiden Strategien L und R, wobei L (R) für die Wahl des Schützen (Torhüters) nach links (rechts) zu schießen (springen) steht. Als Payoffs dieses Spiels fungieren für beide Spieler die Wahrscheinlichkeiten eines Erfolgs[8]. Hieraus wird ersichtlich, dass es sich um ein Nullsummen-Spiel handelt, da der Gewinn (Erfolg) des einen Spielers gleichzeitig den Verlust (Misserfolg) des anderen Spielers bedeutet. Abbildung 2.2 zeigt dieses

[6] In diesem Zusammenhang beschreibt der englische Ausdruck "one-shot two-person zerosum game" das Spiel noch präziser, warum er auch im Folgenden gebraucht wird.

[7] Für die genauen Regeln des Elfmeterschießen siehe:
http://www.fifa.com/documents/fifa/laws/LOTG2005_d.pdf

[8] Für den Torhüter stellt es einen Erfolg dar, wenn er einen Elfmeterschuß hält, während für den Schützen ein Treffer den Erfolg bedeutet.

Spiel in Normalform.

Abbildung 2.2: Elfmeterschießen in Normalform

		Torhüter	
		L	R
Schütze	L	(π_{LL})	(π_{LR})
	R	(π_{RL})	(π_{RR})

2.2 Annahmen der Spieltheorie

In diesem Abschnitt soll näher auf die Annahmen eingegangen werden, welche die Spieltheorie ihren Analysen zu Grunde legt. Hierbei handelt es sich, wie oben bereits angesprochen, um mehr oder weniger strikte Voraussetzungen, die erfüllt sein müssen, um das 'Instrument' Spieltheorie adäquat anwenden zu können.

2.2.1 Rationalität der Spieler

Spieltheorie hat motiviertes Handeln zum Gegenstand (vgl. Shubik 1982). Deshalb spielen die Präferenzen der Akteure und der Nutzen bestimmter Handlungen eine wichtige Rolle. Die Standard-Nutzentheorie bezieht sich im Allgemeinen auf den einzelnen Akteur, jedoch ist es in der Analyse strategischer Situationen notwendig, Präferenzensets zu betrachten, die nebeneinander existieren, aber auch interagieren.

Die Analyse *rationaler* Handlungen bezieht sich hierbei immer auf ein Schema konsistenter Präferenzen und Erwartungen. Wichtig ist hierbei eine Unterscheidung zwischen der Wahl eines Spielers auf der einen Seite und auf der anderen Seite der Präferenz(en) eines Spielers: So stellt das eine eine Handlung dar, während das andere eine 'Haltung' beschreibt. So steht eine Wahl mit den Entscheidungen oder den Strategien in Beziehung, während sich die Präferenzen auf das Ergebnis, also die Payoffs des Spiels beziehen (ebd.:82).

Nutzen und Präferenzen

Das zu Grunde gelegte Menschenbild geht von einem perfekt rationalen Akteur aus. Dieser verfügt über alle benötigten Informationen und kann diese in seinem Sinne optimal nutzen, weil er fähig ist, alle notwendigen 'Kalkulationen' adäquat durchzuführen und die daraus entstehenden Konsequenzen zu erkennen und in angemessener Weise zu bewerten. Unter diesen Voraussetzungen kann er in diesem Zusammenhang eindeutige optimale Entscheidungen treffen. Das Verhalten eines rationalen Spielers sollte also durch eine Nutzenfunktion bezüglich seiner Präferenzen gegenüber dem Ausgang des Spiels beschreibbar sein (vgl. Myerson 2002:5). Um jedoch Optimalität bezüglich einer Entscheidung zwischen gegebenen Alternativen bewerten zu können, bedarf es eines Kriteriums. Dies wird durch die *Präferenzstruktur* eines Individuums geleistet. Sie gibt also die Bewertung konkreter Situationen wieder. Um das Konzept der *Präferenzstruktur* sinnvoll anwenden zu können, müssen zwei fundamentale Annahmen gelten. Zum einen ist dies die Forderung nach *Vollständigkeit*, zum anderen wird *Transitivität* der Präferenzen gefordert. Die Vollständigkeit ist erreicht, wenn für jedes Paar von Alternativen (A, B) gilt:

$$\begin{aligned} & A \succeq B \\ \text{oder} \quad & B \succeq A \end{aligned}$$

Das Individuum kann jedoch auch *indifferent* zwischen den Alternativen sein. In diesem Fall gilt gleichzeitig sowohl $A \succeq B$ als auch $B \succeq A$, oder anders ausgedrückt $A = B$.
Soll *Transitivität* gegeben sein, so muss für jedes Tripel von Alternativen (A, B, C) gelten:

$$\begin{aligned} \text{wenn} \quad & A \succeq B \\ \text{und} \quad & B \succeq C \\ \text{dann muss gelten} \quad & A \succeq C \end{aligned}$$

Ist es nun möglich, alle Alternativen linear zu ordnen, so können ihnen Zahlen zugeordnet werden, die dann den Nutzen u, den die jeweilige Alternative dem Akteur stiftet, repräsentieren. J. von Neumann und O. Morgenstern (1947) waren die ersten, die vorschlugen, den Nutzen auf einer Intervall-Skala zu messen. Hierfür entwickelten sie eine Methode, die auf der Untersuchung der Präferenzen von Akteuren bezüglich einiger Lotterien basiert. Eine Lotterie wird durch

$$L = (p_1A_1, p_2A_2, \ldots, p_rA_r), \qquad \sum_{i=1}^{r} p_i = 1 \tag{2.1}$$

beschrieben. p_i bezeichnet hier die Wahrscheinlichkeit den Gewinn A_i zu erhalten. Von dem Akteur wird angenommen, dass er die einzelnen Gewinne auf einer ordinalen Skala ordnen kann. Hierfür gebraucht er die binäre Relation $\mathbf{R}$, welche für "... wird nicht gegenüber ... bevorzugt" steht. Wenn A_1 der am meisten und A_2 der am wenigsten bevorzugte Gewinn ist, kann folgende Relation aufgestellt werden: $A_r\mathbf{R}A_{r-1}\mathbf{R}\ldots\mathbf{R}A_1$. Durch die Verwendung der Relation $\mathbf{R}$ ("wird nicht gegenüber bevorzugt") wird sichergestellt, dass es zur Indifferenz zwischen zwei Gewinnen kommen kann und, dass mehr als ein Gewinn am wenigsten bzw. am meisten bevorzugt werden kann.

Um verschiedene Nutzenniveaus vergleichbar zu machen, führten von Neumann und Morgenstern eine Lotterie ein: Es wird angenommen, dass der Akteur vor die Wahl gestellt wird, entweder den Gewinn A_i zu erhalten oder eine Lotterie zu spielen, bei der er mit Wahrscheinlichkeit p den Gewinn A_1, oder mit Wahrscheinlichkeit $(1-p)$ den Gewinn A_r erzielen kann. Wenn der Akteur A_i gegenüber der Lotterie präferiert, wird die Wahrscheinlichkeit p erhöht und das Angebot wird erneuert. Wenn er lieber die Lotterie spielt, wird p verringert und das Angebot erneuert. Wird p , beginnend mit 0, wiederholt erhöht, dann muss der Akteur irgendwann bevor $p = 1$ wird seine Wahl auf die Lotterie lenken. Denn wenn $p = 1$, entspricht das Angebot einer Wahl zwischen A_i und A_1, was dem am

meisten präferierten Gewinn entspricht. Im Falle einer stetigen Verringerung von p muss der Akteur—bevor $p = 0$— A_i vorziehen, da er, wenn $p = 0$, nur noch die Wahl zwischen A_i und A_r hat. Hieraus folgt, dass der Akteur für einen bestimmten Wert von p zwischen 0 und 1 indifferent sein wird zwischen A_i und der Lotterie $(pA_1, (1-p)A_r)$.
Es sei u_i der Wert von p, bei dem der Akteur indifferent ist. Da der Ursprung und die Einheit einer Intervallskala frei gewählt werden können, wird der Nutzen von A_1 gleich 1 gesetzt und der Nutzen von A_r gleich 0. Daraus ergibt sich u_i als Nutzen von A_i.
Der Grundgedanke dieser Methode beruht auf der Annahme, dass der Nutzen einer Lotterie gleich dem gewichteten Durchschnitt der einzelnen Gewinne ist, wobei die Gewichtungen den Wahrscheinlichkeiten der Gewinne entsprechen. Ein Angebot von A_1 ist gleichbedeutend dem Angebot einer Lotterie mit der Gewinnwahrscheinlichkeit 1 für A_1. In diesem Fall entspricht der Nutzen der Lotterie genau dem Nutzen des Gewinns. Ist nun aber—wie oben festgelegt— der Nutzen von A_1 gleich 1 und der von A_r gleich 0, dann folgt für den Nutzen der Lotterie $(pA_1, (1-p)A_r)$, dass er wegen $p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0 = p$ ist. Weil der Akteur zwischen A_i und der Lotterie $(u_iA_1, (1-u_i)A_r)$ mit Nutzen $(u_i \cdot 1 + (1-u_i) \cdot 0) = u_i$ indifferent ist, folgt hieraus, dass u_i der Nutzen von A_i ist.

Wenn der Nutzen einer Lotterie bekannt ist, können die Nutzen der einzelnen Gewinne in der Lotterie $(p_1A_1, p_2A_2, \ldots, p_rA_r)$ mit $r > 3$ auf dieser Grundlage bestimmt werden. Dies kann auf zwei unterschiedlichen Wegen geschehen. Der eine Weg der Nutzenbestimmung von $A_j (j \neq i)$ besteht darin, den Akteur vor die Wahl zwischen der Lotterie $(pA_1, (1-p)A_r)$ und A_j zu stellen und p solange anzupassen, bis er indifferent zwischen den Alternativen wird. Der auf diese Weise herausgefundene Nutzen von A_j wird mit u_j bezeichnet.
Die andere Möglichkeit, den Nutzen von A_j zu bestimmen, besteht darin, den Akteur zwischen der Lotterie $(pA_i, (1-p)A_r)$ und A_j wählen zu lassen. Da der Nutzen von A_i oben als u_i hergeleitet wurde und zugleich der Nutzen von A_r definitionsgemäß Null ist, ergibt sich der Nutzen der Lotterie $(pA_i, (1-p)A_r)$ als pu_i. Wenn p wiedrum solange angepasst wird bis der Akteur indifferent zwischen der Lotterie $(pA_i, (1-p)A_r)$ und A_j ist, wenn also $p = p^*$, dann ist der

Nutzen von A_j durch p^*u_i bestimmt. Allerdings stellt sich nun die Frage, ob die Gleichung $u_j = p^*u_i$ Gültigkeit besitzt (vgl. Rapoport 1989). Vorrausgesetzt die oben erläuterte Herleitung ist sinnvoll, so behält die Gleichung ihre Gültigkeit. Außerdem muss der Nutzen jedes Gewinns der gleiche bleiben, egal auf welche Weise er hergeleitet wurde. Mit anderen Worten:

> “ . . . a certain consistency is required from the actor if his choices lead us to determining his utilities for the alternatives on an interval scale” (Rapoport 1989:17).

Diese geforderte Konsistenz manifestiert sich in den folgenden Postulaten (vgl. Luce and Raiffa 1957:23ff.)

P_1: *Ordnung der Alternativen.* Es muss eine Präferenzordnung bezüglich der Alternativen auf ordinalem Niveau gegeben sein.

P_2: *Reduktion verbundener Lotterien.* Seien $A_1, A_2 \ldots, A_r$die Gewinne einer Lotterie $(p_1A_1, \ldots, p_rA_r)$. Eine Menge von Lotterien $L^{(i)} = (p_1^{(i)}A_1, \ldots, p_r^{(i)}A_r)$ mit$(i = 1, \ldots, s)$ und eine Lotterie $(q_1L^{(1)}, \ldots, q_sL^{(s)})$— die Gewinne dieser Lotterie seien Teilnahmeberechtigungen an den Lotterien $L^{(1)}, \ldots, L^{(s)}$ — seien gegeben. Der Akteur ist dann zwischen der Lotterie $(q_1L^{(1)}, \ldots, q_sL^{(s)})$ und der Lotterie $(p_1^*A_1, ..., p_r^*A_r)$ indifferent wenn gilt:

$$p_i^* = q_1p_i^{(i)} + q_2p_i^{(2)} + \cdots + q_sp_i^{(s)}. \tag{2.2}$$

Der Akteur sollte also genau dann zwischen einer zweistufigen und einer einstufigen Lotterie indifferent sein, wenn der erwartete Gewinn aus beiden Lotterien gleich ist.

P_3: *Monotonie.* Der Akteur sollte eine Lotterie $(pA_1, (1 - p)A_r)$ der Lotterie $(p'A_1, (1-p')A_r)$ vorziehen, wenn und nur wenn $p > p'$. Es ist offensichtlich, dass diejenige Lotterie zu präferieren ist, in welcher die Wahrscheinlichkeit, den am meisten präferierten Gewinn zu erzielen, am größten ist.

P_4: *Substituierbarkeit.* Wenn der Akteur indifferent ist zwischen Gewinn A_j und der Lotterie $\tilde{A}_j = (pA_1, (1 - p)A_r)$, dann sollte er ebenfalls indifferent sein zwischen den Lotterien $L = (p_1A_1, \ldots, p_jA_j, \ldots, p_rA_r)$ und

$L^* = (p_1 A_1, \ldots, p_j \tilde{A}_j, \ldots, p_r A_r)$, in der der Gewinn A_j durch die Teilnahmeberechtigung an der Lotterie $\tilde{A}_j$ ersetzt wurde.

P_5: *Ordnung von Lotterien.* Die Relation $\mathbf{R}$("... wird nicht gegenüber... bevorzugt") in Bezug auf eine Menge von Lotterien mit den Gewinnen $A_1, \ldots, A_r$ beschreibt eine schwache Ordnung.

Diese Annahme stellt eine stärkere Anforderung als Postulat P_1 dar. So wird hier unterstellt, dass die Akteure auch Lotterien in eine schwache Ordnung bringen können. Die geforderte Konsistenz der Präferenzen bezüglich der Lotterien kann jedoch nicht immer gefordert werden, es sei denn, die Akteure versuchen bewusst, den erwarteten Nutzen zu maximieren und haben die Möglichkeit, die erwarteten Nutzen der Lotterien—in denen die Gewinne die Alternativen darstellen—zu vergleichen. Um dies tun zu können, müssen sich die Akteure ihrer kardinalen Nutzen der Alternativen zumindest auf Intervall-Skalen-Niveau bewußt sein. Dies sind jedoch genau die Nutzen (utilities) die herausgearbeitet werden sollten. Um einen Zirkelschluss zu vermeiden, wird angenommen, dass die Akteure fähig sind, die einzelnen Lotterien durch separate Beurteilungen konsistent zu ordnen. Diese Annahme kann jedoch in der Realität nicht ohne weiteres angenommen werden, es sei denn, es handelt sich um die einfachsten Fälle (vgl. Rapoport 1989).
Postulat P_5 stellt eine Verallgemeinerung von P_4 dar. Wenn die Menge der Lotterien auf $(p^{(i)} A_1, 0A_2, \ldots, 0A_{r-1}, (1 - p^{(i)}) A_r$ beschränkt wird, dann werden die Präferenzen und Indifferenzen nur durch den Vergleich der Höhe von $p^{(i)}$ bestimmt. Da in diesem Fall 'nur' Zahlen verglichen und in eine Ordnung gebracht werden müssen, kann die Forderung der Monotonie erfüllt werden. Schwieriger gestaltet es sich jedoch, wenn Lotterien mit mehr als zwei Gewinnen in eine schwache Ordnung gebracht werden sollen.
Wenn die Relation $\mathbf{R}$ alle oben genannten Anforderungen erfüllt, können die Nutzen der Alternativen auf Intervall-Skalen-Niveau abgebildet werden.

> "If the preference or indefference relation $\succeq$ satisfies assumptions 1 through 6, there are numbers u_i associated with the basic prizes A_i such that for two lotteries L and L' the magnitudes of the expected

values

$$p_1u_1 + p_2u_2 + \ldots + p_ru_r \quad \text{and} \quad p'_1u_1 + p'_2u_2 + \ldots + p'_ru_r$$

reflect the preference between the lotteries"(Luce&Raiffa 1957:29).

Stellt ein Akteur nun bezüglich der Lotterien eine Präferenzrelation der Form $\succeq$ her und für jede Lotterie existiert eine Zahl $u(L)$, wobei der Wert dieser Zahlen die Präferenzen widerspiegelt, so existiert für den Akteur eine Nutzenfunktion u der Form

$$\begin{aligned} u(A_1) &= 1, \\ u(A_i) &= u_i \qquad \text{für} \quad 1 < i < r, \\ u(A_r) &= 0 \end{aligned}$$

und

$$u(p_1A_1, \ldots, p_rA_r) = p_1u_1 + p_2u_2 + \ldots + p_ru_r,$$

wobei definitionsgemäß $u_1 = 1$ und $u_r = 0$ gilt.

Es ist eine offene Frage, wie gut und wie oft reale Akteure den geforderten Postulaten Folge leisten (können). Es scheint so zu sein, dass P_1 und P_3 leichter zu erfüllen sind als P_4, während P_2 und P_5 kaum erfüllbar scheinen, besonders im Falle von vielen und komplexen Lotterien (vgl. Rapoport, 1989).

2.2.2 Eigenschaften der Spieler

An dieser Stelle soll noch einmal näher auf die Rationalitätsannahme eingegangen werden. Innerhalb der Spieltheorie wird davon ausgegangen, dass sich die Spieler rational verhalten. Dies beinhaltet zum einen die Annahme, dass jeder Spieler versucht, sich den höchstmöglichen Payoff des Spiels zu sichern und zum anderen, dass er dazu auch die Fähigkeiten besitzt. Nach Dixit&Skeath (2002) bedeutet dies jedoch nicht, dass sich die Spieler zwangsläufig als völlige Egoisten verhalten. Vielmehr ist es durchaus möglich, dass das Wohlergehen anderer Teilnehmer am Spiel mit in die Auszahlung des Spielers einfliesst, was dazu führen kann, dass er sehr wohl darauf bedacht ist, dass es auch den anderen Spielern ermöglicht

wird, an den Payoffs teilzuhaben. Auch eine Kurzzeitorientierung kann den Spielern nicht zwingend 'vorgeworfen' werden, da es durchaus rational sein kann, auf einen späteren, dann jedoch zumindest gleich großen Payoff zu bauen. Die Frage ist jedoch, wie gut ein Spieler tatsächlich in der Lage ist, alle notwendigen Punkte zu 'überblicken' um in der konkreten Situation wirklich optimal zu handeln (wählen). Hierbei wird den Spielern wiederum die Fähigkeit alle notwendigen Überlegungen, Berechnungen und Einschätzungen korrekt vollziehen zu können unterstellt.
Hierzu ist zu sagen, dass die Erfüllung dieser Annahme wohl am ehesten bei professionellen Spielern und solchen, die sehr viel Übung im jeweiligen Spiel haben, anzutreffen ist, während im 'Normalfall' (bei normalen Akteuren) Abstriche bezüglich der totalen Rationalität gemacht werden müssen (ebd.; Shubik 1982).
Wie oben bereits erwähnt wird zudem angenommen, dass die Rationalität aller am Spiel beteiligten Akteure common knowledge ist. Das heisst, alle Spieler wissen voneinander, dass sie sich innerhalb der gegebenen Grenzen rational verhalten werden, was wiederum zu einem gewissen Maß an 'Handlungssicherheit', bzw. zur Einschätzbarkeit des wechselseitigen Gegners führt. Allerdings kann dies auch zu Komplikationen führen, geht man davon aus, dass in der Realität jeder Spieler seinen Kalkulationen ein individuelles Wertesysem zu Grunde legt (vgl. Dixit&Skeath 2002). Auch in diesem Falle bleibt jedoch die Annahme bestehen, dass sich die Spieler gemäß ihres jeweils individuellen Wertesystems rational verhalten.

2.3 Lösung des Zwei-Personen-Nullsummen-Spiels

Wie in Abschnitt 2.1.3 aufgezeigt wurde, handelt es sich beim zu untersuchenden Spiel um ein Zwei-Personen-Nullsummen-Spiel mit den zugehörigen Charakteristika.
Die Akteure werden durch das Motiv der Maximierung der Payoffs angetrieben. Hierdurch werden sie immer einen bestimmten Pfad durch das Spiel wählen. Im Zwei-Personen Fall stehen sich also zwei Spieler gegenüber, deren Präferenzen sich in einem bestimmten Maß unterscheiden. Im Falle eines (Konstant-) bzw. Nullsummen-Spiels ist dieser Unterschied bezüglich der Präferenzen maximal.

Das heisst, die Interessen der beiden Spieler stehen sich diametral gegenüber: Was für den einen 'gut' ist, ist für den anderen 'schlecht'.
In einer Auszahlungsmatrix bedeutet dies, dass die Pay-offs der beiden Spieler zwar den gleichen Betrag, jedoch unterschiedliche Vorzeichen haben. Die einzelnen Auszahlungen addieren sich also immer zu Null[9] auf.

2.3.1 Gleichgewicht in gemischten Strategien

Seien

$$\begin{aligned} S_1 &= A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\} \\ S_2 &= B = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\} \end{aligned}$$

die reinen Strategien, welche Spieler 1 und Spieler 2 zu Verfügung stehen[10] und O_{ij} die zugehörigen Outcomes, die sich durch die Kombination der jeweiligen Strategien ergeben. Das Spiel kann so in Matrix-Form dargestellt werden (Abbildung 2.3).
Im vorliegenden Fall handelt es sich um ein Spiel, bei dem jedem Spieler jeweils zwei reine Strategien zur Wahl stehen. In der Matrix ist jeweils nur ein Outcome abgetragen. 'Übersetzt' man die Outcomes wiederum in Nutzen, so ergeben sich die zu einer Strategienkombination (α_i, β_j) gehörigen Payoffs $M(\alpha_i, \beta_j)$, die mit a_{ij} für Spieler 1 und b_{ij} für Spieler 2 abgekürzt werden. Im Falle des Nullsummen-Spiels gilt hierbei

$$\begin{aligned} a_{ij} &= -b_{ij} \\ a_{ij} + b_{ij} &= 0. \end{aligned}$$

[9]Diesem Umstand verdankt diese 'Klasse' von Spielen ihren Namen, wobei das *Nullsummen-Spiel* als Unterkategorie der *Konstantsummenspiele* verstanden werden kann.

[10]Die formale Darstellung des Spiels ist aus Luce&Raiffa (1957) übernommen.

Abbildung 2.3: Spiel in Matrixform

$$
\begin{array}{ll|cccccc|}
\multicolumn{2}{c}{} & \multicolumn{6}{c}{\text{Reine Strategien von Spieler2}} \\
 & & \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_j & \dots & \beta_n \\
 & \alpha_1 & O_{11} & O_{12} & \dots & O_{1j} & \dots & O_{1n} \\
 & \alpha_2 & O_{21} & O_{22} & \dots & O_{2j} & \dots & O_{2n} \\
\text{Reine Strategien} & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\text{von Spieler1} & \alpha_i & O_{i1} & O_{i2} & \dots & O_{ij} & \dots & O_{in} \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & \alpha_m & O_{m1} & O_{m2} & \dots & O_{mj} & \dots & O_{mn}
\end{array}
$$

Minimax-Theorem

Geht man davon aus, dass das gegeben Spiel keinen Gleichgewichtspunkt hat[11][12], so ist kein Gleichgewicht in reinen Strategien möglich. Dies folgt aus dem Umstand, dass der eine Spieler eine gewisse Strategienkombination bevorzugt, während der andere Spieler versucht, eben diese Kombination zu verhindern[13] (Dixit&Skeath 2002:124). In diesem Kontext hat der Torhüter ein Interesse daran, die Ecke in die der Schütze schießt zu erraten, während der Schütze versucht, seine Wahl der Ecke so lange wie möglich zu verbergen[14]. Mit anderen Worten ist es für beide Spieler von Vorteil, wenn sie gegenseitig unberechenbar sind.

[11] Dieser wäre gegeben, wenn es eine Kombination von Strategien α_{i_0} und β_{i_0} gibt, welche gewährleistet, dass

- Spieler1 keinen Outcome O_{ij_0} dem Gleichgewichts-Outcome $O_{i_0j_0}$ vorzieht
- Spieler2 keinen Outcome O_{i_0j} dem Gleichgewichts-Outcome $O_{i_0j_0}$ vorzieht

und somit keiner der Spieler einen Anreiz hat, von dieser Kombination abzuweichen (vgl. Luce&Raiffa 1957).

[12] Zur Herleitung siehe Anhang S. IV f.

[13] Luce&Raiffa (1957) demonstrieren dies an einem Beispiel: siehe Anhang S. VI

[14] Dies gilt gegengleich für den Torhüter, da auch dieser seine Wahl nicht vorzeitig verraten will, um dem Schützen so keinen Vorteil bei dessen Wahl zu bescheren.

Für diese Gruppe von Spielen, in denen kein Gleichgewicht in reinen Strategien möglich ist, konnte John v. Neumann (1928) zeigen, dass auch diese eine Lösung besitzen. Allerdings ist der Lösungsweg in diesem Fall ein anderer. So besagt das Minimax-Theorem, dass jedes Zwei-Personen-Nullsummen-Spiel mit endlich vielen reinen Strategien durch die Einführung von gemischten Strategien ins Gleichgewicht gebracht werden kann (vgl. Luce&Raiffa 1957). Es kann gezeigt werden, dass jedes Spiel mit simultanen Zügen ein Nash-Gleichgewicht (Nash 1951) in gemischten Strategien besitzt, wobei

> "... there is a pair of mixed strategies, one for each player, such that each mixture is that players's best response to the others mixture" (Dixit&Skeath 2002:125).

Gemischte Strategien

Eine gemischte Strategie ist gegeben, wenn aus dem Set von reinen Strategien, die dem Spieler zu Verfügung stehen, eine zufällig mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit gewählt wird.

> "Mixed Strategies are just rules telling players to use each of their pure strategies a certain percentage of the time. They are a specific method of randomization" (ebd.).

Den Spielern ist es erlaubt, gemischte Strategien zu verwenden. Eine solche gemischte Strategie für Spieler1 kann durch

$$\mathbf{x} = (x_1\alpha_1, x_2\alpha_2, \dots, x_m\alpha_m)$$

dargestellt werden, wobei α_i, $i = 1, \dots, m$ die reinen Strategien von Spieler1 abbildet, und x_i, $i = 1, \dots, m$ die Wahrscheinlichkeit wiedergibt, mit der die reine Strategie gewählt wird. Zudem gilt:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \quad \text{und} \quad x_i \geq 0$$

Die Summe aller gemischten Strategien von Spieler1 wird mit X_m bezeichnet.

Analog hierzu bildet

$$\mathbf{y} = (y_1\beta_1, y_2\beta_2, \ldots, y_n\beta_n)$$

die gemischte Strategie für Spieler2 ab, wobei hier

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \quad \text{und} \quad y_j \geq 0$$

gilt. Die Summe aller gemischten Strategien von Spieler2 wird mit Y_n bezeichnet.

Als Payoff für Spieler1 ergibt sich aus der Kombination der gemischten Strategien $(\mathbf{x},\ \mathbf{y})$

$$\begin{aligned} M(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} y_i \left(\sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} y_j a_{ij}\right). \end{aligned}$$

Aufgrund der Nullsummeneigenschaften ergibt sich ein Payoff an Spieler2 von $-M(\mathbf{x},\ \mathbf{y})$.

Kalkül von Spieler1

Um das optimale Ergebnis zu erzielen, wird Spieler1 eine gemischte Strategie $\mathbf{x}$ aus X_m wählen, die seinen Payoff maximiert, bzw. den von Spieler2 erzielbaren Payoff minimiert. Da das tatsächliche Ergebnis jedoch von beiden Spielern abhängt und auch Spieler2 so wählen wird, dass er ein optimales Ergebnis erzielt, wird Spieler1 versuchen, $M(\mathbf{x},\ \mathbf{y})$ durch die Wahl von $\mathbf{x}$ zu maximieren, während Spieler2 durch geeignete Wahl von $\mathbf{y}$ versucht, $M(\mathbf{x},\ \mathbf{y})$ zu minimieren.

Spieler1 kann in jedem Fall sein Sicherheits-Level v_1, welches durch

$$v_1(\mathbf{x}) = \min_{y} M(\mathbf{x},\ \mathbf{y})$$

bestimmt ist, erreichen. Will er dieses Level maximieren, so muss er eine gemischte Strategie $\mathbf{x}^{(0)}$ wählen, so dass

$$v_1(\mathbf{x}^{(0)}) \geq v_1(\mathbf{x}), \quad \text{für alle } \mathbf{x} \text{ aus } X_m.$$

Sei $v_1(\mathbf{x}^{(0)}) = v_1$, dann ergibt sich

$$v_1 = v_1(\mathbf{x}^{(0)}) = \max_x v_1(\mathbf{x}) = \max_x \min_y M(\mathbf{x},\, \mathbf{y}).$$

Unter der Voraussetzung $v_1(\mathbf{x}^{(0)}) = v_1$ ergibt sich $M(\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{y}) \geq v_1$ für alle y, was zur Folge hat, dass $\mathbf{x}^{(0)}$ Spieler1 einen Payoff von mindestens v_1 garantiert. Die gemischte Strategie $\mathbf{x}^{(0)}$ wird Maximin-Strategie genannt, wenn sie das Sicherheits-Level von Spieler1 maximiert.
Luce&Raiffa (1957) weisen darauf hin, dass Maximin-Strategien immer existieren, allerdings müssen sie nicht eineindeutig sein. Sei O_1 die Menge aller optimalen Maximin-Strategien und $\mathbf{x}^*$ sei ein Element dieser Menge, dann erreicht $\mathbf{x}^*$ ein Sicherheits-Level von v_1. Gehört $\mathbf{x}'$ jedoch nicht zu O_1 so erreicht diese Strategie nur ein geringeres Sicherheits-Level als v_1.

Kalkül von Spieler2

Spieler2 hat auf Grund der Nullsummen-Eigenschaft des Spiels ein Interesse daran, den Payoff von Spieler1 möglichst gering zu halten. Wählt Spieler2 seine gemischte Strategie $\mathbf{y}$, so ergibt sich für Spieler1 ein Payoff von

$$v_2(\mathbf{y}) = \max_x M(\mathbf{x},\, \mathbf{y}),$$

welcher nicht überschritten werden kann.
Die Minimierung von $v_2(\mathbf{y})$ stellt das oberste Interesse von Spieler2 dar.
Analog zu Spieler1 sollte Spieler2 eine Strategie $\mathbf{y}^{(0)}$ wählen, dass gilt

$$v_2 = v_2(\mathbf{y}^{(0)}) \leq v_2(\mathbf{y}), \quad \text{für alle } \mathbf{y} \text{ aus } Y_n.$$

Hieraus wiederum folgt

$$v_2 = v_2(\mathbf{y}^{(0)}) = \min_y \max_x M(\mathbf{x},\, \mathbf{y})$$

und

$$M(\mathbf{x}, \mathbf{y}^{(0)}) \leq v_2 \quad \text{für alle } \mathbf{x}.$$

Die gemischte Strategie $\mathbf{y}^{(0)}$ wird Minimax-Strategie genannt.

Sei O_2 die Menge aller optimalen Minimax-Strategien von Spieler2. Gehört $\mathbf{y}^*$ dieser Menge an, dann garantiert die Wahl dieser Strategie dem Spieler2, dass Spieler1 höchstens einen Payoff von v_2 bekommt. Wählt Spieler2 jedoch eine Strategie $\mathbf{y}'$, welche nicht zu O_2 gehört, so kann Spieler1 mehr als v_2 erzielen. Wählt Spieler1 eine Maximin-Strategie und Spieler2 eine Minimax-Strategie, so kann Spieler1 sich mindestens v_1 sichern, während die Minimax-Strategie von Spieler2 dafür sorgt, dass Spieler1 höchstens v_2 erreichen kann. Hieraus folgt

$$v_1 \leq v_2.$$

Gleichgewicht

Eine Strategien-Kombination $(\mathbf{x}', \mathbf{y}')$ ist genau dann im Gleichgewicht, wenn $\mathbf{x}'$ gut gegen $\mathbf{y}'$ ist, also

$$M(\mathbf{x}, \mathbf{y}') \leq M(\mathbf{x}', \mathbf{y}') \quad \text{für alle } \mathbf{x}$$

und gleichzeitig $\mathbf{y}'$ gut ist gegen $\mathbf{x}'$, so, dass gilt

$$M(\mathbf{x}', \mathbf{y}') \leq M(\mathbf{x}', \mathbf{y}) \quad \text{für alle } \mathbf{y}.$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$M(\mathbf{x}, \mathbf{y}') \leq M(\mathbf{x}', \mathbf{y}') \leq M(\mathbf{x}', \mathbf{y}) \quad \text{für alle } \mathbf{x} \text{ und } \mathbf{y}$$

und

$$\max_x M(\mathbf{x}, \mathbf{y}') = M(\mathbf{x}', \mathbf{y}') = \min_y M(\mathbf{x}', \mathbf{y}).$$

Hieraus ergibt sich das eigentliche Minimax-Theorem (v.Neumann 1928), nach dem jede der drei folgenden Bedingungen die jeweils anderen zwei Bedingungen impliziert.

1. Es existiert eine Kombination von Strategien, die ein Gleichgewicht herbeiführt.

2. $v_1 \equiv \max_x \min_y M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \min_y \max_x M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv v_2$.
   Dies bedeutet, dass die Operatoren $\max_x$ und $\min_y$ kommutativ sind.

3. Es existiert eine reelle Zahl v (der Wert des Spiels), eine Strategie $\mathbf{x}^{(0)}$ in X_m und eine Strategie $\mathbf{y}^{(0)}$ in Y_n so dass gilt:
   (a) $\sum_i a_{ij} x_i^{(0)} \geq v \quad$ für $j = 1, 2, \ldots, n$
   (b) $\sum_j a_{ij} y_j^{(0)} \leq v \quad$ für $i = 1, 2, \ldots, m$.

Durch die Anwendung der Strategie $\mathbf{x}^{(0)}$ *kann sich Spieler1 mindestens* v *sichern, während Spieler2 durch Anwendung von* $\mathbf{y}^{(0)}$ *erreichen kann, dass Spieler1 maximal* v *erzielt.*
Dieser Zustand bezeichnet das eineindeutige Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien eines Zwei-Personen-Nullsummen-Spiels. Keiner der beiden Spieler hat bei diesem Zustand einen Anreiz, von der gewählten Strategie abzuweichen, da sie wechselseitig die besten Ergebnisse liefern.
Es konnte also gezeigt werden, dass es für beide Spieler eine optimale Strategie gibt, die gewährleistet, dass die Spieler gegenseitig unberechenbar bleiben, aber gleichzeitig ein Gleichgewicht erreichen können.

2.3.2 Gleichgewicht im Elfmeterschießen

Abbildung 2.4 zeigt nocheinmal das Elfmeterschießen in Form eines Spiels im Sinne der Spieltheorie.

Als Payoffs gelten die Erfolgswahrscheinlichkeiten π_{ij} wobei $i = \{L, R\}$ und $j = \{L, R\}$ die reinen Strategien der beiden Spieler angeben. Der Schütze versucht, die erwartete Wahrscheinlichkeit einen Treffer zu erzielen, zu maximieren, während im Gegenzug der Torhüter versucht, diese zu minimieren.
Das Spiel hat nach Palacios-Huerta (2003) dann ein eineindeutiges Nash-Gleichgewicht,

Abbildung 2.4: Elfmeterschießen in Normalform

		Torhüter	
		L	R
Schütze	L	(π_{LL})	(π_{LR})
	R	(π_{RL})	(π_{RR})

wenn gilt:

$$\begin{aligned} \pi_{LR} > \quad & \pi_{LL} \quad < \pi_{RL} \\ \pi_{RL} > \quad & \pi_{RR} \quad < \pi_{LR}. \end{aligned}$$

Kapitel 3

Stand der Forschung und Hypothesen

Das folgende Kapitel beschäftigt sich zum einen mit dem aktuellen Forschungsstand zum Thema der 'Minimax-Theorie' und stellt im Anschluss die zentralen Hypothesen, welche sich aus der Theorie des Gleichgewichts in gemischten Strategien generieren lassen, vor.

3.1 Empirische Studien

von Neumanns Minimax-Theorem stellt eines der ältesten und zugleich grundlegendsten Prinzipien der Spieltheorie dar. Dennoch erweist es sich in der Literatur als schwierig, die theoretisch vorhergesagten Zusammenhänge empirisch zu überprüfen (vgl. Palacios-Huerta 2003). Da es sich bei den meisten Studien um experimentelle Designs handelt, die im Labor stattfinden, lässt sich argumentieren, dass unter diesen künstlichen Bedingungen nicht zwangsläufig so gespielt wird, wie es in der Realität der Fall wäre (vgl. Chiappori, Levitt und Groseclose 2002). Es zeigt sich in verschiedenen Arbeiten, dass das theoretisch geforderte Verhalten in Experimenten eher schlecht umgesetzt wird (vgl. Brown&Rosenthal 1990, Erev&Roth 1998). Dennoch soll eine neuere experimentelle Studie und eine 'Antwort' darauf vorgestellt werden.
In der neueren Literatur wurden vermehrt empirische Daten analysiert, die aus

nicht-experimentellen Settings gewonnen werden konnten. Drei dieser Studien sollen im Anschluss an die Vorstellung der experimentellen Untersuchung mit ihren zentralen Ergebnissen vorgestellt werden.

Experimenteller Test

Barry O'Neill (1987) untersucht an 50 Studenten, die in 25 Paaren spielen, im Rahmen eines einfachen Kartenspiel-Experiments, welches die Eigenschaften eines Nullsummensspiels besitzt, ob sie sich gemäß der Minimax-Theorie verhalten. Jeder der 50 Studenten spielt hierbei 105 Züge, was zu einer Gesamtzahl von 5250 Zügen führt, wobei in jedem Zug ein Betrag von 5 ausgespielt wird. O'Neill kann zeigen, dass die Spieler sich gemäss der vorhergesagten Wahrscheinlichkeiten für die Strategiewahl verhalten. In Bezug auf die geforderte gegenseitige Unberechenbarkeit der Spieler kann jedoch nicht gezeigt werden, dass die Spieler sich optimal, also unberechenbar verhalten. So zeigen die Spieler einen zu häufigen Wechsel der Strategien.

Das Experiment wurde im Folgenden kontrovers diskutiert. James N. Brown und Robert W. Rosenthal (1990) bearbeiten O'Neills Daten mit anderen Methoden und kommen zu dem Ergebnis, dass sich die Spieler in diesem Experiment nicht gemäß den theoretischen Erwartungen verhalten.

Nicht-experimentelle Tests

An dieser Stelle sollen drei Arbeiten vorgestellt werden, die Daten aus realen Spielen als Grundlage ihrer Analysen heranziehen. Bei allen drei Studien wurden die Daten aus dem Bereich des professionllen Sports gewonnen. Dies hat den Vorteil, dass in diesem Falle die Spieler zum einen hochmotiviert sind sich optimal zu verhalten, zum anderen kann davon ausgegangen werden, dass die Spieler Experten auf ihrem Gebiet sind und somit die technischen Fähigkeiten haben, sich exakt wie gewünscht zu verhalten (vgl. Palacios-Huerta 2003; Walker&Wooders 2001).

Nullsummen-Spiel im Tennis

Professionelles Tennis bietet die Möglichkeit, gewisse Spielzüge in Form eines Zwei-Personen-Nullsummen-Spiels zu modellieren.
Walker&Wooders (2001) stellen den Aufschlag und das Erwarten[1] des Aufschlags als Spiel in Normalform dar. Hierbei haben sowohl der Aufschläger als auch der Empfänger jeweils zwei reine Strategien (Aufschlag nach rechts oder links und 'Decken' des Spielfelds in Erwartung eines Aufschlags nach rechts oder links) zur Verfügung, die sie im optimalen Verhältnis mischen sollten um das Gleichgewicht erreichen zu können. Auch im Tennis ist die eigene Unberechenbarkeit erforderlich, weshalb die Spieler zufällig ihren Aufschlag, bzw. ihre Deckung zufällig wählen sollten. Um dies zu testen, bearbeiten die beiden Autoren Daten, die aus 10 Spielen innerhalb der Grand Slam Turnierserie und dem abschließenden Masters-Turnier stammen. In Bezug auf die Mischung kommen Walker&Wooders auf ein bestätigendes Ergebnis, während auch sie die Annahme der seriellen Unabhängigkeit der gewählten Strategie nicht in allen Fällen bestätigen können.

Nullsummen-Spiel im Fußball

Auch innerhalb des Spiels Fußball gibt es eine Situation, die sich nahezu perfekt dazu eignet, einer spieltheoretischen Modellierung unterzogen zu werden: Der Strafstoß oder (umgangssprachlich) der Elfmeter.
Chiappori, Levitt und Groseclose (2002:1139) stellen fest:

> "Two players (a kicker and a goalie) participate in a zero-sum game with a well-identified strategy space. [...], there is little ambiguity to the preferences of the paticipants: the kicker wants to maximize the probability of a score and the goalie wants to minimize scoring. [...], enormous amounts of money are at stake, both for the franchise and the individual paticipants. [...], data are readily available and are continually generated. Finally the participants know a great deal about the past history of behavior on the opponents, as this information is routinely tracked by soccer clubs".

[1]Die Namensgebung des Spiels 'Tennis' ist vom französischen tener (=erwarten) abgeleitet.

Die Autoren testen in ihrer Studie ebenfalls die Annahmen der Minimax-Theorie an Daten, die aus der französischen und italienischen ersten Fußball-Liga stammen und kommen zu dem Ergebnis, dass sich das Verhalten der Spieler mit Hilfe des Modells näherungsweise beschreiben lässt. Allerdings bestehen bei dieser Studie Probleme bezüglich der Aggregation über die einzelnen Spieler, da für sie zum Teil nur sehr wenige Beobachtungen vorhanden sind.

Diesem Problem begegnet Palacios-Huerta (2003), indem er in seiner Untersuchung das Verhalten im Nullsummen-Spiel Elfmeterschießen von Fußballprofis aus der englischen, italienischen und spanischen ersten Liga analysiert, die jeweils an mindestens 30 Elfmeter-Situationen beteiligt waren. Dabei kann er zeigen, dass sich die Spieler im Sample verhalten, wie es die Theorie vorhersagt.
Die vorliegende Arbeit hat zum Ziel, das Verhalten deutscher Fußballprofis zu analysieren. Hierbei lehnt sie sich beim Vorgehen zum Teil an die eben vorgestellte Studie an, zum Teil werden jedoch andere Verfahren der Testung verwendet. Dennoch sollen die von Palacios-Huerta (2003) vorgestellten Befunde für deutsche Spieler nachvollzogen werden.

Zusammenfassende Interpretation

Wie aus den vorgestellten Studien hervorgeht, ist es möglich zu zeigen, dass —zumindest professionelle—Spieler in der Lage sind, sich optimal verhalten. Insbesondere stellte es sich aber in der Literatur als für Menschen schwierig heraus, die serielle Unabhängigkeit der Züge zu erreichen, oder (allgemeiner) zufällige Reihen zu generieren (vgl. Bakan 1960, Rath 1966, Wagenaar 1972).
Allen Studien gemein ist die Testung der beiden zentralen Hypothesen, die sich aus der Theorie generieren lassen und die im folgenden Abschnitt genauer erläutert werden.

3.2 Hypothesen

Wie oben bereits mehrfach angeführt wurde, lassen sich aus der Theorie des Gleichgewichts in gemischten Strategien zwei zentrale Hypothesen bezüglich des

Verhaltens der am Spiel beteiligten Personen ableiten. Es handelt sich hierbei um die Hypothese der Gleichheit der Trefferwahrscheinlichkeiten beider Strategien und zudem um die geforderte serielle Unabhängigkeit der Schüsse.

3.2.1 Gleichheit der Trefferwahrscheinlichkeiten

Geht man davon aus, dass im Spiel ein eindeutiges Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien existiert, dann sollten die Wahrscheinlichkeiten eines Erfolgs für beide Strategien gleich groß sein.
Sei t_L[2] die Wahrscheinlichkeit, dass der Torhüter seine Strategie 'Links' wählt. Diese Wahrscheinlichkeit sollte der Torhüter optimalerweise so wählen, dass er damit die Erfolgswahrscheinlichkeit der beiden Strategien des Schützen gleich groß macht. Es soll also gelten:

$$p_L^S = p_R^S \quad .$$

Hierbei wiederum sind p_L^S und p_R^S gegeben durch

$$\begin{aligned} p_L^S &= t_L \pi_{LL} + (1 - t_L)\pi_{LR} \quad , \\ p_R^S &= t_L \pi_{RL} + (1 - t_L)\pi_{RR} \quad . \end{aligned}$$

Gegengleich sollte auch der Schütze seine Wahrscheinlichkeit s_L nach Links zu schießen so wählen, dass die Erfolgswahrscheinlichkeiten der beiden Strategien des Torhüters gleich groß sind:

$$p_L^T = p_R^T \quad ,$$

wobei

$$\begin{aligned} p_L^T &= s_L(1 - \pi_{LL}) + (1 - s_L)(1 - \pi_{RL}) \\ \text{und} \quad p_R^S &= s_L(1 - \pi_{LR}) + (1 - s_L)(1 - \pi_{RR}) \end{aligned}$$

[2]Folgende formale Darstellungen sind aus Palacios-Huerta (2003) übernommen

die Trefferwahrscheinlichkeiten für den Schützen wiedergeben.

Diese Hypothesen bezüglich der Gleichheit der Erfolgswahrscheinlichkeiten beider Strategien wird im nächsten Kapitel empirisch, anhand von Daten aus der ersten deutschen Fußball-Bundesliga untersucht.

3.2.2 Serielle Unabhängigkeit der Schüsse

Die zweite zentrale Hypothese, welche sich aus der Theorie des Gleichgewichts in gemischten Strategien folgern lässt, bezieht sich auf die gegenseitige Unberechenbarkeit der Spieler.
Geht man davon aus, dass sich die Spieler konstanten Payoffs über die einzelnen Spiele hinweg gegenüber sehen und die Spieler sich in jedem einzelnen Spiel bemühen, den unmittelbaren Payoff zu maximieren, so sollten sie ihre jeweilige Strategie zufällig wählen (vgl. Palacios-Huerta 2003; Walker&Wooders 2001). Genauer sollte die Wahl der Strategie über die einzelnen Situationen hinweg einem unabhängigen Ziehen aus einem Zufallsprozess entsprechen. Dies schliesst mit ein, dass die konkrete Wahl weder vom eigenen vorherigen, noch vom vorherigen Verhalten des Gegners beeinflusst wird.

Kapitel 4

Auswertung und Ergebnisse

Dieses Kapitel widmet sich dem empirischen Teil der Arbeit. Zunächst wird der Datensatz und die nötigen Modifikationen beschrieben. Im Anschluss folgen die Tests der beiden zentralen Hypothesen.

4.1 Beschreibung des Datensatzes

In den folgenden beiden Abschnitten werden der Datensatz und die für die Analysen benötigten Variablen beschrieben.

4.1.1 Der Datensatz

Der Roh-Datensatz, der von der IMP AG zur Verfügung gestellt wurde, enthält insgesamt 1043 Elfmetersituationen. Dies entspricht einer Vollerhebung aller Elfmetersituationen, die in den Spielzeiten 1992/1993 bis 2003/2004, der ersten Fußball-Bundesliga in Deutschland stattgefunden haben. Jede der Situationen ist durch folgende, für das vorliegende Forschungsinteresse zentralen, Kriterien beschrieben. Für jede Situation sind der Schütze und der Torhüter aufgeführt. Der Datensatz beinhaltet Angaben sowohl zum Schussfuß des Schützen, als auch zur Richtung jedes einzelnen Schusses. Für alle beteiligten Torhüter ist die Richtung aufgeführt, in die sie in jeder einzelnen Situation gesprungen sind. Zudem beinhaltet der Datensatz das Ergebnis aller Situationen, mit den vier Möglichkeiten 'Tor', 'Pfosten/Latte', 'Vorbei' und 'vom Torhüter gehalten'. Die Daten geben Aufschluß über den Zeitpunkt des Elfmeters im Spiel und den Spielstand zum Zeitpunkt des Elfmeters. Ferner ist aus den Daten ersichtlich, ob es sich für den Schützen—und gegengleich auch für den Torhüter— um ein Heim- bzw. ein Auswärtsspiel handelt, in dem die Elfmetersituation stattfindet.

4.1.2 Variablen

An dieser Stelle werden nun die zentralen Variablen, welche in den einzelnen Analyseschritten herangezogen werden, beschrieben.
Im Datensatz zeigt sich, dass alle Schützen entweder nur mit dem linken oder dem rechten Fuß schießen. Es gibt keinen Schützen, der seinen Schussfuß variiert. Es wurden 666 Elfmeter mit dem rechten und 377 mit dem linken Fuß geschossen. Mit dem rechten Fuß wurden 44% der Schüsse, aus Sicht des Schützen, nach links, 42.8% nach rechts und 13.2% in die Mitte geschossen. Bei den linksfüßigen Schützen teilen sich die Schüsse wie folgt auf: 44% der Schüsse gingen nach rechts, 16,7% in die Mitte und 39.3% nach links. Mit dem rechten Schussfuß wurden insgesamt 497 (74.6%)Tore erzielt, während 77.2% der Schüsse mit links ihren Weg ins Tor fanden.
Aus Sicht der Schützen fanden die Elfmeter zu 67.3% in einem Heimspiel statt. Von den insgesamt 1043 Elfmetersituationen fanden 417 in der ersten und 626 in der zweiten Halbzeit statt.
Wiederum aus der Sicht der Schützen wurden 336 Elfmeter bei einer negativen Tordifferenz[1] geschossen und bei 707 Situationen befand sich das Team des Schützen entweder im Vorsprung oder es herrschte Gleichstand zum Zeitpunkt des Elfmeters.
Für die Torhüter lässt sich sagen, dass sie sich in 98.4% aller Fälle für eine der beiden alternativen Sprungrichtungen entschieden haben. Hierbei sprangen sie 520 mal nach links und 506 mal nach rechts. Nur insgesamt 17 mal wurde die dritte Alternative 'Mitte' von den Torhütern gewählt.

[1]Die Mannschaft des Schützen liegt in diesem Fall zurück

In 20.6% der Fälle konnten die Torhüter einen Erfolg[2] für sich verbuchen.

4.2 Annahmen

Zunächst musste der Datensatz, der von der IMP-AG zur Verfügung gestellt wurde angemessen aufbereitet werden: Im ersten Schritt wurden die Strategien in Bezug auf den Schussfuss des Schützen geordnet, da es einen Unterschied bezüglich des Spiels zwischen Links- und Rechts-Füßern gibt. Hierzu wurden die Strategien (Links- oder Rechtsschuss) den beiden Spielertypen unterschiedlich zugewiesen. Zu diesem Zweck wird das Kozept der "Natürlichen Seite" von Chiappori, Levitt und Groseclose (2002) und Palacios-Huerta (2003) übernommen. Die Autoren weisen darauf hin, dass die beiden Spielertypen es einfacher finden, in eine bestimmte Richtung zu schießen. Ein rechtsfüßiger Schütze schießt demnach aus seiner Sicht leichter nach links, während es einem Linksfüßer weniger 'Schwierigkeiten' bereitet nach rechts zu schießen. Diese 'einfacheren' Schussrichtungen werden im Folgenden "Natürliche Seite" genannt und werden mit R bezeichnet[3]. Hingegen steht L für die "Nicht-Natürliche Seite", welche für die beiden Spielertypen die jeweils andere Schussrichtung umfasst. Hieraus folgt, dass ein Linksfüßer, der nach rechts (aus Sicht des Torhüters auf dessen linke Seite) schießt, für den Torhüter das selbe bedeutet, wie ein Rechtsfüßer, der nach links (aus Sicht des Torhüters auf dessen rechte Seite) schießt. Durch diesen 'Kunstgriff' spielt der Torhüter das gleiche Spiel, egal welchem Spielertyp er sich gegenüber sieht.

> "All that matters is whether the kicker and goalkeeper pick the kicker's strong side R or his weak side L"(Palacios-Huerta 2003:402).

Dementsprechend bedeutet eine Wahl von R durch den Torhüter, dass er sich für einen Sprung in die starke Richtung des Schützen entscheidet, während L einen Sprung in die schwache Richtung des Schützen bedeutet. Geht man nun hiervon aus, bedeutet dieses, dass nicht nur das Spiel für beide Spielertypen

[2]Für die Torhüter bedeutet 'Erfolg' einen Elfmeterschuß zu halten.

[3]Dieser Strategie wurden auch die Schüsse in die Mitte zugeordnet. Dies geschieht aus dem Grund, dass es sich für einen Schützen genauso einfach gestaltet in die Mitte zu schießen, wie auf seine natürliche Seite (siehe hierzu Palacios-Huerta (2003), Fußnote 12)

gleich ist, auch die Payoffs sind für Links- und Rechtsfüßer die gleichen. Insofern ist es möglich, das konkrete Verhalten der beiden Typen als nominell äquivalent zu betrachten. Tabelle 4.1 zeigt die empirische Verteilung der Strategiewahl für Schützen und Torhüter.

Tabelle 4.1: Verteilung der Strategiewahl

	Linksfüßer	Rechtsfüßer	Torhüter
nicht-natürliche Seite L	148	285	484
natürliche Seite R	229	381	542

Die gemeinsame Verteilung der Strategiewahl von Schützen und Torhütern lässt sich in Tabelle 4.2 ablesen.

Tabelle 4.2: Gemeinsame Verteilung der Strategien

		Schützen	
		L	R
Torhüter	L	202	282
	R	225	317

Die Grundlage dieser empirischen Verteilung besteht jedoch nur aus 1026 Fällen. Der Grund hierfür ist der Ausschluß der 17 Beobachtungen in denen der Torhüter die Kategorie 'Mitte' gewählt hat. Dies ist zulässig, da zum einen die Fallzahl sehr gering ist (1.6% aller Fälle), zum anderen weisen empirische Befunde[4] darauf

[4]Siehe hierzu Chiappori et al.2002; Palacios-Huerta 2003

hin, dass auch bei Einbezug dieser Möglichkeit keine anderen Ergebnisse erreicht werden können.

4.2.1 Test der Annahmen

Um die eben getroffene Annahme der Gleichheit des Spiels für die beiden Spielertypen zu testen, werden zwei binär-logistische Modelle mit den abhängigen Variablen 'Treffer' und 'Schuss auf die natürliche Seite' getestet. Als zentrale unabhängige Variable fungiert hierbei der Schussfuß des Schützen (der linke oder der rechte Fuß). Als Kovariaten werden zusätzlich verschiedene Variablen, die den Stand des Fußballspiels zum Zeitpunkt des Elfmeters beschreiben, mit in das Modell aufgenommen. Hierbei handelt es sich um eine Variable, die angibt, ob der Schütze den Elfmeter in einem Heim- oder Auswärtsspiel zu schießen hat, um eine Variable, welche die Tordifferenz des Spiels wiedergibt und zudem eine Variable, die den Zeitpunkt des Elfmeters zum Inhalt hat.
Um die Gleichheit des Spiels auch für die Torhüter zu testen, wird ebenfalls ein binär-logistisches Modell berechnet. In diesem Falle wird der Einfluss der zentralen Variable 'Schussfuß' auf die Wahl des Torhüters bezüglich der Seite, auf die er springt, betrachtet. Als Kovariaten dienen dabei wieder die oben beschriebenen Variablen, welche den Stand des Spiels zum Zeitpunkt des Elfmeters zum Inhalt haben.
Im Folgenden wird das Verfahren der binär-logistischen Regression genauer beschrieben.

Binär-logistische Regression

Ziel der binär-logistischen Regression ist es, den Einfluss unabhängiger Variablen auf eine dichotome abhängige Variable zu untersuchen. Genauso wie bei der OLS-Regression[5] ist der zentrale Wert der bedingte erwartete Mittelwert $E(Y|x)$, also der mittlere erwartete Wert der abhängigen Variable Y gegeben den Wert von x. Allerdings muss für eine dichotome abhängige Variable dieser Wert zwischen Null und Eins liegen also,

[5] Ordinary Least Squares-Regression

$$0 \leq E(Y|x) \leq 1. \tag{4.1}$$

Hierbei ist zu beachten, dass die Veränderung von $E(Y|x)$ bei der Änderung von x um eine Einheit progressiv kleiner wird, je näher sich $E(Y|x)$ an Eins oder Null annähert. Die Verteilungskurve verläuft hier S-förmig. $E(Y|x)$ wird in diesem Fall durch eine logistische Verteilung modelliert. Unter dieser Voraussetzung kann $E(Y|x)$ durch $\pi(x) = E(Y|x)$ ersetzt werden, wobei

$$\pi(x) = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x}} \tag{4.2}$$

In einem weiteren Schritt wird $\pi(x)$ folgendermaßen transformiert:

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln\left[\frac{\pi(x)}{1-\pi(x)}\right] \\ &= \beta_0 + \beta_1 x \end{aligned} \tag{4.3}$$

Hierdurch ergeben sich nach Hosmer und Lemeshow (1989) für das sog. Logit $g(x)$ die Vorteile, dass es linear in seinen Parametern wird, dass es als kontinuierlich betrachtet werden kann und dass es Werte zwischen $-\infty$ und ∞ annehmen kann. Der Wert der abhängigen dichotomen Variable gegeben x lässt sich durch

$$y = \pi(x) + \epsilon \tag{4.4}$$

beschreiben, wobei ϵ einen Fehlerterm darstellt. Dieser kann jedoch nur genau zwei Werte annehmen. So ist er mit der Wahrscheinlichkeit $\pi(x)$ durch $\epsilon = 1 - \pi(x)$ bestimmt, wenn $y = 1$ gilt, und $\epsilon = -\pi(x)$ mit Wahrscheinlichkeit $1 - \pi(x)$ für den Fall, dass $y = 0$. Somit ist der Fehlerterm ϵ mit einem Mittelwert von Null und einer Varianz von $\pi(x)[1 - \pi(x)]$ binomialverteilt mit der Wahrscheinlichkeit des bedingten Mittelwerts $\pi(x)$.

Ist die abhängige Variable mit 0 und 1 kodiert (hier beispielsweise: 0=kein Treffer; 1=Treffer), so müssen die Werte der unbekannten Parameter β_0 und β_1 geschätzt werden, um das logistische Regressionsmodell aus Gleichung (4.2) an den konkreten Datensatz anzupassen. Anders als bei der linearen Regression werden die Parameter nicht nach der OLS-Methode, sondern nach der Maximum Likelihood-Methode geschätzt.

> "In a very general sense the method of maximum likelihood yields values for the unknown parameters which maximize the probability of obtaining the observed data set" (Hosmer and Lemeshow 1989:8).

Hierzu ist es erforderlich, die Likelihood-Funktion zu konstruieren, welche die Wahrscheinlichkeit der Daten als eine Funktion der unbekannten Parameter wiedergibt. Die Maximum-Likelihood-Schätzer der Parameter maximieren nun diese Likelihood-Funktion. Da die abhängige Variable mit 0 und 1 kodiert ist, gibt die Gleichung

$$\pi(x) = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x}}$$

die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(Y = 1|x)$ dafür an, dass Y den Wert 1 annimmt, gegeben x. Analog gibt $1 - \pi(x)$ die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(Y = 0|x)$ an. Damit ist der Beitrag eines konkreten Paares $(x_i; y_i)$, bei dem gilt $y_i = 1$, zur Likelihood-Funktion gleich $\pi(x_i)$. Demgegenüber ist der Beitrag $1 - \pi(x_i)$ wenn $y_i = 0$. Damit ergibt sich für den Beitrag eines Paares $(x_i; y_i)$ zur Likelihood-Funktion:

$$\zeta(x_i) = (\pi(x_i))^{y_i}[1 - \pi(x_i)]^{1-y_i}. \tag{4.5}$$

Unter der Annahme, dass die Beobachtungen voneinander unabhängig sind, ergibt sich aus dem Produkt der Terme von (1.5) die Likelihood-Funktion

$$l(\beta) = \prod_{i=1}^{n} \zeta(x_i). \tag{4.6}$$

Hieraus wiederum ergibt sich die Log-Likelihood-Funktion

$$L(\beta) = \ln[l(\beta)] = \sum_{i=1}^{n} \{y_i \ln[\pi(x_i)] + (1 - y_i) \ln[1 - \pi(x_i)]\}. \tag{4.7}$$

Wird diese Funktion nach β_0 und β_1 differenziert und die sich daraus ergebenden Gleichungen gleich 0 gesetzt, so findet sich derjenige Wert von β, welcher $L(\beta)$ maximiert und als Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\beta}$ bezeichnet wird. Ebenso stellen $\hat{\beta}_0$ und $\hat{\beta}_1$ die Maximum-Likelihood-Schätzer für β_0 und β_1 dar.

Interpretation der Koeffizienten

Allgemein geben die Koeffizienten an, wie sich die abhängige Variable verändert, wenn sich die unabhängige Variable um eine Einheit erhöht. Die vorhergesagten

Werte der abhängigen Variable lassen sich im Falle einer logistischen Regression nach Kohler und Kreuter (2001) als logarithmierte Chance eines Erfolgs interpretieren. Auf den hier vorliegenden Fall bezogen bedeutet dies, dass die abhängige Variable (kein Treffer=0; Treffer=1) die logarithmierte Chance eines Treffers darstellt[6]:

$$\ln \frac{P(Y=1)}{1-P(Y=1)}. \tag{4.8}$$

Allerdings lässt sich diese logarithmierte Chance inhaltlich nur sehr schwer interpretieren. Deshalb ist es angebracht, eine Transformation durchzuführen, welche es ermöglicht die Logit-Koeffizienten wieder in Wahrscheinlichkeiten umzurechnen. Dies kann nach Kohler und Kreuter (2001 S.259) durch

$$P(Y=1) = \frac{e^L}{1+e^L} \tag{4.9}$$

erreicht werden, wobei L die Logits $\beta_0 + \beta_1$ bezeichnet. Mit dieser Transformation lässt sich die Wahrscheinlichkeit für einen Referenzfall bestimmen, im Vergleich zu welchem sich die Veränderungen in den unabhängigen Variablen wiederspiegeln.

Ein weiteres Instrument zur Interpretation der Koeffizienten stellt die Betrachtung der Odds dar. Sie sind durch

$$Odds = \frac{P(Y=1)}{1-P(Y=1)} \tag{4.10}$$

definiert und geben die Chance, einen Treffer zu erzielen, an. Die Odds-Ratio, definiert durch

$$Odds - Ratio = \frac{\frac{P(Y=1)}{1-P(Y=1)}}{\frac{P(Y=0)}{1-P(Y=0)}} = e^{\beta_1} \tag{4.11}$$

gibt wiederum an, wie sich das Chancenverhältnis ändert, wenn sich die unabhängige Variable um eine Einheit erhöht (vgl.Backhaus et al. 200:121). Also zum Beispiel, ob sich die Chance auf einen Treffer verändert, wenn es sich bei dem Spieler um einen Rechts- oder Linksfüßer handelt.

[6]Aus Gründen der Vereinfachung wird im Folgenden eine etwas andere formale Notation verwendet

4.2.2 Modelle

In diesem Kapitel werden die einzelnen Regressionsmodelle für die Schützen und Torhüter vorgestellt und berechnet. Das erste Modell ist von besonderer Bedeutung, da bei seiner Berechnung und Interpretation exemplarisch für die folgenden Modelle vorgegangen wird.

Modell 1: Gleichheit des Spiels für beide Typen von Schützen

Zunächst soll die Annahme getestet werden, dass es zwischen Links- und Rechtsfüßern keinen Unterschied bezüglich des Spiels gibt. Diese Annahme wird für alle 1043 im Datensatz enthaltenen Elfmetersituationen überprüft. Hierfür wird die Wahrscheinlichkeit einen Treffer zu erzielen als abhängige Variable in das binär-logistische Modell aufgenommen, während der Schussfuß des Schützen als unabhängige Variable miteinbezogen wird. Tabelle 4.3 zeigt das Ergebnis der durchgeführten logistischen Regression. [7]

Tabelle 4.3: Binär-logistische Regression der abhängigen Variable Treffer

Konstante und Variable	Koeffizient (t-Wert)	Signifikanz	Odds-Ratio	Wahrscheinlichkeit
Konstante	1.219	0.000		
Schussfuß	-0.140	0.355	0.869	0.771

Die einfachste mögliche Interpretation eines Koeffizienten bedient sich des Vorzeichens des Koeffizienten. Ein negatives Vorzeichen bedeutet, wie in diesem Falle, dass die Wahrscheinlichkeit oder Chance einen Treffer zu erzielen fällt, wenn es sich bei dem Schützen um einen Rechtsfüßer handelt. Allerdings zeigt sich , dass

[7]Da das Statistikprogramm Stata es ermöglicht, sich die Odds-Ratios anzeigen zu lassen, werden alle Berechnungen der logistischen Regression in diesem Programmpaket ausgeführt.

dieser Effekt mit einem p-Wert von $p = 0.355$ nach der Wald-Statistik weder auf dem 10%- noch auf dem 5%-Niveau als signifikant angesehen werden kann.
Die Interpretation über die Odds-Ratio besagt, dass die Chance auf einen Treffer für einen Rechtsfüßer um das 0.869-fache steigt[8].
Werden zudem noch die Wahrscheinlichkeiten berechnet, so ergibt sich eine Trefferwahrscheinlichkeit für eine Linksfüßer von 77%. Hingegen ergibt sich für die Schützen, welche mit Rechts schießen nur eine Wahrscheinlichkeit von 74%.
Um sich ein besseres Bild machen zu können, werden weitere Variablen zur Kontrolle mit in das Modell aufgenommen. Hierbei handelt es sich zum einen um eine Dummy-Variable dafür, ob es sich bei der Elfmetersituation aus der Sicht des Schützen um ein Heim- oder ein Auswärtsspiel handelt. Eine weitere Kontrolldummy gibt an, in welcher Halbzeit der Elfmeter geschossen wurde. Eine dritte Variable kontrolliert für die Tordifferenz zum Zeitpunkt des Elfmeters[9], während die vierte Kontrollvariable sich auf die Strategie des Torhüters bezieht. Als Referenzfall ergibt sich hieraus ein linksfüßiger Schütze, der auswärts, in der ersten Halbzeit bei aus seiner Sicht negativer Tordifferenz den Elfmeter schießt. Tabelle 4.4 fasst die Ergebnisse der logistischen Regression mit der abhängigen Variable Treffer zusammen.

Für den Refernzfall (Linksfüßer) ergibt sich also nach Formel (4.9) eine Trefferwahrscheinlichkeit von 76.7%. Demgegeüber steht eine geringere Trefferwahrscheinlichkeit von 74.1% für einen Rechtsfüßer. Da es sich bei den errechneten Wahrscheinlichkeiten um bedingte Wahrscheinlichkeiten (sie hängen jeweils von den Werten der anderen unabhängigen ab) handelt, lassen sie sich nur sinnvoll in Bezug auf den Refernzfall interpretieren. Aus diesem Grund werden zusätzlich Wahrscheinlichkeitseffekte nach folgender Formel(WS-Effekte) berechnet.

$$\Delta P_{j0} = P_j - P_0 = \left(\frac{e^{L_j}}{1 + e^{L_j}}\right) - \left(\frac{e^{L_0}}{1 + e^{L_0}}\right) \tag{4.12}$$

und geben den Effekt wieder, welcher sich bei der isolierten Variation der jeweiligen unabhängigen Variable in Bezug auf den Referenzfall ergibt. So verringert sich die Wahrscheinlichkeit, einen Treffer zu erzielen für einen Rechtsfüßer um

[8] Im vorliegenden Falle bedeutet dies, dass die Chance kleiner wird.

[9] Hierbei zählt die Kategorie 'Gleichstand' zur positiven Tordifferenz.

Tabelle 4.4: Modell 1: Binär logistische Regression der abhängigen Variable Treffer

Konstante und Variable	Koeffizient (t-Wert)	Signifikanz	Odds-Ratio	Wahrschein-lichkeit	WS-Effekt
Konstante	**1.190** (5.69)	0.000	—	0.767	—
Schussfuß	**-0.138** (-0.91)	0.363	0.871	0.741	-0.026
Heimspiel	**-0.052** (-0.33)	0.742	0.949	0.757	-0.010
Halbzeit	**0.104** (0.70)	0.483	1.109	0.785	0.018
Tordifferenz	**0.001** (0.01)	0.994	1.001	0.767	0.000
McFadden R^2	**0.0013**				
Log Likelihood	-579.3668				
N	1043				

2.6% in Bezug auf den Referenzfall eines Linksfüßers, unter der Konstanthaltung der übrigen unabhängigen Variablen. Analog dazu lassen sich die WS-Effekte der anderen Variablen interpretieren. So verringert sich die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer um 1% wenn es sich um ein Heimspiel handelt, wohingegen sich die Wahrscheinlichkeit um 1.8% erhöht, in der zweiten Halbzeit zu treffen. Zudem macht es keinen Unterschied (WS-Effekt=0) bezüglich der Trefferwahrscheinlichkeit, ob das Team des Schützen vor dem Elfmeter im Rückstand war, eine ausgeglichene Tordifferenz hatte oder sogar in Führung lag. Alle vier Effekte weisen geringe Werte auf, was als erstes Anzeichen dafür zu werten ist, dass die

beiden Spielertypen dasselbe Spiel spielen.
Betrachtet man in einem nächsten Schritt die Signifikanz der Koeffizienten, so zeigt sich, dass keiner der Koeffizienten im Modell, weder auf dem 5%- noch auf dem 10%-Niveau, als signifikant angesehen werden kann. Die in Tabelle 4.4 angegebenen Werte geben die Ergebnisse des Wald-Tests wieder.

> “ Beim Wald-Test wird zunächst der b-Koeffizent durch eine Schätzung seines Standardfehlers...geteilt. Vom Ergebnis dieser Berechnung wird angenommen, dass es einer Normalverteilung folgt. Anhand der Wahrscheinlichkeitsfunktion einer Normalverteilung lässt sich beurteilen, wie wahrscheinlich der beobachtete b-Koeffizient ist, wenn der wahre Wert in der Grundgesamtheit 0 ist”(Kohler&Kreuter 2001:286).

Da bei diesem Test jedoch die Möglichkeit besteht, dass er manche Koeffizienten fälschlicherweise als nicht signifikant ausweist (vgl.ebd.), wird ein weiteres Verfahren zur Beurteilung der Signifikanz herangezogen.
Dieses Verfahren beruht auf dem Vergleich der Güte verschiedener Regressionsmodelle und wird Likelihood-Ratio-Test genannt. Es wird untersucht, ob sich die Güte eines Modells durch die Aufnahme zusätzlicher Variablen verbessert (ebd.). Zu diesem Zweck wird die Prüfgrösse

$$\chi^2_{L(Diff)} = -2(\ln L_{ohne} - \ln L_{mit}) \tag{4.13}$$

berechnet, wobei L_{ohne} die logarithmierte Likelihood des Modells ohne die neue Variable darstellt und L_{mit} die logarithmierte Likelihood des Modells mit der neu aufgenommenen Variable ist. $\chi^2_{L(Diff)}$ folgt nach Kohler und Kreuter (2001) der χ^2-Verteilung, wobei die Anzahl der Freiheitsgrade die Differenz der Anzahl der Parameter zwischen den beiden Modellen ist. Im gegebenen Zusammenhang liegt das Hauptaugenmerk auf dem Spielertypen. Deshalb wird der Likelihood-Ratio-Test für das Modell ohne die Variable Schussfuß durchgeführt. Es ergit sich bei einem Freiheitsgrad ein $\chi^2_{L(Diff)}$-Wert von 0.83 mit der Wahrscheinlichkeit 0.36, wenn der Koeffizient in der Grundgesamtheit 0 ist. Demzufolge ist keine Sicherheit darüber gegeben, dass der Koeffizient in der Grundgesamtheit nicht 0 ist. Der Schussfuß hat also keinen signifikanten Einfluss auf die Trefferwahrscheinlichkeit, wobei durch diesen Test nichts über die Stärke des Einflusses ausgesagt werden kann. Tabelle 4.5 zeigt die Ergebnisse des Likelihood-Ratio-Tests für alle anderen Variablen im Modell.

Tabelle 4.5: Likelihood-Ratio-Tests Modell 1

Modell ohne	$\chi^2_{L(Diff)}$	Signifikanz
Schussfuß	0.83	0.3614
Heimspiel	0.11	0.7415
Halbzeit	0.49	0.4834
Tordifferenz	0.00	0.9940

Auch dieser Test zeigt, dass keine der Variablen, die in das Modell aufgenommen wurden, einen signifikanten Einfluss auf die Trefferwahrscheinlichkeit hat. Somit kann die Hypothese der Gleichheit des Spiels vorläufig angenommen werden.

Um Aussagen über den Fit des Gesamtmodells treffen zu können, werden von Stata zwei Maßzahlen bereitgestellt. Zum einen ist dies McFadden's R^2[10] , zum anderen wird der Likelihood-Ratio-χ^2-Wert ausgewiesen.
Ersteres wird durch

$$R^2 = \frac{\ln L_0 - \ln L_k}{\ln L_0} = 1 - \frac{\ln L_k}{\ln L_0} \tag{4.14}$$

berechnet, wobei $\ln L_k$ die Likelihood angibt, dass alle Koeffizienten außer der Konstanten 0 sind und $\ln L_k$ die Likelihood des berechneten Modells aufzeigt. Dieser Wert kann nun Werte zwischen 0 und 1 annehmen, wobei es keine einheitliche Interpretation des konkreten Wertes gibt. Vielmehr gilt: "Je höher, desto besser"(Kohler und Kreuter 2001, S.272). Backhaus (2000) gibt als Regel an, dass bei Werten zwischen 0.2 un 0.4 bereits von einer guten Modellanpassung gesprochen werden kann, da McFadden's R^2 unter Verwendung realer Daten ein

[10]Beim Verfahren der logistischen Regression gibt es keine einheitlich gebrauchte Maßzahl. Vielmehr gehört auch das hier gebrauchte McFadden's R^2 zu einer Vielzahl sog. Pseudo-Rs.

Erreichen des Werts 1 nahezu unmöglich ist. Für das beschriebene Modell errechnet sich ein Wert von 0.0013, welcher weit von einer guten Anpassung entfernt ist.

Der Likelihood-Ratio-χ^2-Wert und seine zugehörige Wahrscheinlichkeit untersuchen die Hypothese, dass alle Koeffizienten außer der Konstanten in der Grundgesamtheit gleich 0 sind. Er wird berechnet durch

$$\chi_L^2 = -2(\ln L_0 - \ln L_K) \tag{4.15}$$

wobei die Multiplikation mit -2 erwirkt, dass χ_L^2 der χ^2-Verteilung folgt. In gegebenem Fall beträgt χ_L^2 1.49 mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.8278, woraus sich folgern lässt, dass die Einflüsse der untersuchten Variablen mit einer hohen Wahrscheinlichkeit in der Grundgesamtheit doch Null sind. Beide Maßzahlen weisen also darauf hin, dass die aufgenommenen unabhängigen Variablen keinen Einfluss auf die Trefferwahrscheinlichkeit nehmen.

Regressionsdiagnostik

Um eine akkurate Interpretation des Regressionsmodells leisten zu können, ist es erforderlich, die Anforderungen, welche an das Modell gestellt werden, zu überprüfen. Da es sich bei den in das Modell aufgenommenen unabhängigen Variablen ausschließlich um dichotome Variablen handelt, wird im Folgenden nur überprüft, ob Multikollinearität bezüglich der Variablen vorliegt.[11]

Korrelieren eine oder mehrere unabhängige Variablen perfekt miteinander, so hat dies zur Folge, dass sich die Regressionskoeffizienten nicht mehr bestimmen lassen und ihre Standardfehler nicht mehr definiert sind. Handelt es sich nicht mehr um eine perfekte, aber dennoch starke Korrelation, leidet die Präzision der Schätzer,

[11] Generell sollte—wenn es sich bei den aufgenommenen Variablen um metrische Variablen handelt— zusätzlich auf die Linearität des Zusammenhangs zwischen der logarithmierten Chance eines Erfolgs und allen unabhänigen Variablen getestet werden. Zudem ist es sinnvoll, den Einfluss von Beobachtungen zu diagnostizieren, die das Ergebnis der statistischen Verfahren stark beeinflussen können. Im hier vorliegenden Fall wäre weder ein Test auf Linearität sinnvoll zu interpretieren, noch gibt es in diesem Sinne einflussreiche Fälle, welche die angewendeten Verfahren verzerren könnten.

weil sich die Standardfehler erhöhen (vgl.Gujarati 1995). Tabelle 4.6 zeigt die Korrelationsmatrix für die vier unabhängigen Variablen.

Tabelle 4.6: Korrelationsmatrix Modell 1

	Schussfuß	Heimspiel	Halbzeit	Tordifferenz
Schussfuß	1.0000			
Heimspiel	-.0011	1.0000		
Halbzeit	-.0233	-.0431	1.0000	
Tordifferenz	.0280	.2062	-.1271	1.0000

Allerdings weist Gujarati (1995 S.336) darauf hin, dass

> "...high zero-order correlations are a sufficient but not necessary condition for the existence of multicollinearity because it can exist even though the zero-order or simple correlations are comparatively low (say less than 0.50)" (Hervorhebung im Original).

In der vorliegenden Matrix ist keine der Korrelationen größer als 0.25. Zudem existiert keiner der von Gujarati (1995) angegebenen 'Indikatoren'(hohes R^2 aber kein signifikanter Koeffizient u.a.), so dass davon auszugehen ist, dass die Ergebnisse nicht durch ein Vorliegen von Multikollinearität verfälscht werden.

Modell 2: Gleichheit des Spiels bezüglich der Strategiewahl

Das zweite Modell testet auf die Gleichheit des Spiels für beide Arten von Schützen bezüglich der Strategiewahl. Die zu testende Annahme der Gleichheit besteht darin, dass die Entscheidung für eine der beiden Strategien (natürliche Seite R oder nicht-natürliche Seite L) für beide Schützentypen gleichbedeutend ist, was zur

Folge hat, dass beide Arten von Schützen bezüglich ihrer Strategiewahl das gleiche Spiel spielen. So sollte sich auch hier kein Effekt des Schussfußes auf die Wahl der Strategie (L oder R) zeigen.
Als abhängige Variable des Modells wird die Wahl des Schützen betrachtet, während als zentrale Einflussvariable wieder der Schussfuß dient. Auch in diesem Modell stellen die drei Kovariaten des vorhergehenden Modells wieder die Kontrollvariablen für den Stand des Spiels zum Zeitpunkt des Elfmeters dar. Der Referenzfall für dieses Modell ist analog zum ersten Modell ein linksfüßiger Schütze, der auswärts, in der ersten Halbzeit bei aus seiner Sicht negativer Tordifferenz den Elfmeter schießt. Tabelle 4.7 zeigt für dieses Modell die Ergebnisse der logistischen Regression. Da in diesem Modell nicht über die Odds-Ratios interpretiert wird, werden sie nicht mehr gesondert aufgeführt.

Wie schon im ersten Modell deutet die Betrachtung der Wald-Statistiken darauf hin, dass die Gleichheit des Spiels gewährleistet ist. Im zweiten Modell hat keine einzige Variable einen signifikanten Einfluss auf die Wahl der Strategie. Allerdings zeigt die unabhängige Variable Schussfuß den 'stärksten', wenn auch nicht signifikanten Einfluss. Aus den oben besprochenen Gründen wird auch für dieses zweite Modell der Likelihood-Ratio-Test herangezogen, um die Signifikanz der einzelnen Einflüsse zu testen. In diesem Modell wird dem Effekt des Schußfusses ebenfalls besondere Aufmerksamkeit beigemessen, da dieser ja die beiden Arten von Schützen unterscheidet. Zusammenfassend gibt Tabelle 4.8 einen Überblick über die einzelnen Tests.

Die Ergebnisse des Likelihood-Ratio-Test geben Aufschluss darüber, dass keine der Einflussvariablen die Wahrscheinlichkeit auf die natürliche Seite zu schießen, in signifikanter Weise verändert. Wiederum den stärksten Effekt weist nach wie vor der Schussfuß auf, wobei jedoch auch er der zweiten Signifikanzprüfung mit einem p-Wert von 0.267 nicht standhalten kann. Alle anderen unabhängigen Variablen weisen noch deutlicher die Annahme eines Einflusses zurück.
Betrachtet man zudem den Gesamt-Fit, so gibt McFadden's R^2 mit einem Wert von 0.0010 eine sehr geringe Güte des Modells wieder und auch χ^2_L (1.38; $p =$ 0.848) weist einen Einfluss der Variablen deutlich zurück.

Tabelle 4.7: Modell 2: Binär logistische Regression der abhängigen Variable Strategiewahl des Schützen

Konstante und Variable	Koeffizient (t-Wert)	Signifikanz	Wahrscheinlichkeit	WS-Effekt
Konstante	**0.469**	0.010	0.615	—
	(2.58)			
Schussfuß	**-0.146**	0.268	0.580	-0.035
	(-1.11)			
Heimspiel	**-0.043**	0.752	0.605	-0.010
	(-0.32)			
Halbzeit	**0.008**	0.951	0.617	0.002
	(0.06)			
Tordifferenz	**-0.013**	0.926	0.612	-0.003
	(-0.09)			
McFadden R^2	**0.0010**			
Log Likelihood	-707.17311			
N	1043			

Um für das zweite Modell diagnostische Aussagen treffen zu können, wird noch einmal Tabelle 4.6 auf Seite 53 herangezogen. Dies ist zulässig, da es sich bei den unabhängigen Variablen des zweiten Modells um die gleichen wie im ersten Modell handelt. Auf diesem Wege lässt sich auf für das zweite Modell zeigen, dass keine Multikollinearität vorliegt.

Tabelle 4.8: Likelihood-Ratio-Tests Modell 2

Modell ohne	$\chi^2_{L(Diff)}$	Signifikanz
Schussfuß	1.23	0.267
Heimspiel	0.10	0.752
Halbzeit	0.00	0.951
Tordifferenz	0.01	0.926

Modell 3: Gleichheit des Spiels für Torhüter

Nicht nur für die Schützen ist es notwendig, die Annahme der Gleichheit des Spiels zu testen. Vielmehr muss die Annahme ebenfalls für die Torhüter gelten, um das Spiel in einer einfachen 2×2-Matrix darstellen zu können. Inhaltlich bedeutet dies, dass die Torhüter die Forderung erfüllen müssen, sich gleich zu verhalten, egal welchem Typen von Schützen sie sich in der jeweiligen Situation gegenüber sehen. Diesen Sachverhalt zu testen ist die Aufgabe der folgenden Modelle.

Als abhängige Variable fungiert hier zum einen die Wahrscheinlichkeit den Elfmeterschuß zu halten[12]. Zum anderen wird auch auf die Gleichheit des Spiels bezüglich der Strategiewahl seitens der Torhüter getestet (Modell 4). Die primäre unabhängige Variable ist in den zwei Modellen für die Torhüter der Schussfuß des Schützen. Als Kontrollvariablen werden abermals die Variablen Heimspiel, Halbzeit und Tordifferenz[13] zum Zeitpunkt des Elfmeters in das jeweilige Modell integriert.

[12]Zur Berechnung dieser Modelle steht nur eine kleinere Fallzahl ($N = 992$)zu Verfügung, da nur Fälle einbezogen werden, in denen der Torhüter den Schuß tatsächlich gehalten hat. Somit werden also alle Fälle ausgeschlossen bei denen der Schütze entweder an den Pfosten bzw. an die Latte oder vorbei geschossen hat.

[13]Die Variablen Heimspiel und Tordifferenz beschreiben jeweils den Zustand aus der Sicht des Torhüters.

Tabelle 4.9: Modell 3: Binär logistische Regression der Variable Erfolgswahrscheinlichkeit des Torhüters

Konstante und Variable	Koeffizient (t-Wert)	Signifikanz	Wahrscheinlichkeit	WS-Effekt
Konstante	**-1.418** (-7.98)	0.000	0.195	—
Schussfuß	**0.155** (0.94)	0.349	0.221	0.026
Heimspiel	**0.023** (0.14)	0.891	0.199	0.004
Halbzeit	**-0.048** (-0.30)	0.766	0.188	-0.007
Tordifferenz	**-0.040** (-0.24)	0.814	0.189	-0.006
McFadden R^2	**0.0011**			
Log Likelihood	-503.52197			
N	992			

Als Referenzfall liegt den beiden folgenden Modellen jeweils ein Torhüter, der sich in der ersten Halbzeit während eines Auswärtsspiels bei aus seiner Sicht negativer Tordifferenz einem linksfüßigen Schützen gegenübersieht, zu Grunde.
Wie oben angedeutet, berechnet das dritte Modell mittels der logistischen Regression die Einflüsse der vier unabhängigen Variablen auf die Outcome-Variable des Erfolgs (Schuß gehalten) des Torhüters. Tabelle 4.9 fasst die Ergebnisse zusammen.

Modell 3 zeigt ebenfalls deutlich, dass die aufgenommenen Variablen bei Betrachtung der Wald-Statistik keine signifikante Wirkung auf die Wahrscheinlichkeit eines Erfolgs des Torhüters ausüben.
Da es sich um andere unabhängige Variablen als bei den vorangegangenen Modellen handelt, wird ein weiterer Likelihood-Ratio-Test für die neuen Variablen berechnet. Dieser wird in Tabelle 4.10 wiedergegeben.

Tabelle 4.10: Likelihood-Ratio-Tests Modell 3

Modell ohne	$\chi^2_{L(Diff)}$	Signifikanz
Schussfuß	0.89	0.3464
Heimspiel	0.02	0.8911
Halbzeit	0.09	0.7659
Tordifferenz	0.06	0.8139

Wie die Anwendung dieses Tests zeigt, ergeben sich auch auf die Erfolgswahrscheinlichkeit der Torhüter keine signifikanten Einflüsse der unabhängigen Variablen. Bestätigt wird diese Vermutung durch den geringen Fit von R^2=0.0011 des Modells und durch die Wahrscheinlichkeit von 79,42% bei einem χ^2_L=1.08, dass alle Koeffizienten in der Grundgesamt gleich Null sind.
Um Multikollinearität ausschließen zu können, wird für die neuen Variablen die Korrelationsmatrix (Tabelle 4.11) angelegt.

Da alle Korrelationen sehr kleine Werte aufweisen, ist das Vorhandensein von Multikollinearität auszuschließen.

Tabelle 4.11: Korrelationsmatrix Modell 3

	Schussfuß	Heimspiel	Halbzeit	Tordifferenz
Schussfuß	1.0000			
Heimspiel	-.0011	1.0000		
Halbzeit	-.0233	-.0431	1.0000	
Tordifferenz	.0280	.2062	-.1271	1.0000

Modell 4: Gleichheit des Spiels bezüglich der Strategiewahl der Torhüter

Die letzte Annahme, die getestet wird, bezieht sich auf die Strategiewahl des Torhüters. Ist es für den Torhüter immer das gleiche Spiel, so wird er seine Wahl bezüglich der Richtung in die er springt— also natürliche oder nicht-natürliche Seite—nicht vom Schussfuß seines Gegenübers abhängig machen. Vielmehr kommt es ja gerade darauf an, dass der Torhüter, egal welchem Typen von Schützen er sich gegenübersieht, für eine der beiden Alternativen entscheidet[14]. Diese Annahme wird durch ein viertes Modell mit der abhängigen Variable Strategiewahl getestet. Analog zu den vorigen Tests wird zunächst wieder die binär-logistische Regression berechnet. Die zugehörigen Parameter finden sich in Tabelle 4.12

In Modell 4 ist der Referenzfall ein Torhüter, der in der ersten Halbzeit, bei aus seiner Sicht negativem Torverhältnis, einem linksfüßigen Schützen gegenübersteht.
Die Interpretation der Koeffizienten führt auch in diesem Modell zur Bestätigung der "Gleichheitshypothese". Keine der Prädiktorvariablen wirkt sich signifikant

[14] Es wird davon ausgegangen, dass der Torhüter anhand mehrerer Kriterien, wie der Anlaufrichtung des Schützen u.a. vorhersagen kann, mit welchem Fuß der Schütze den Strafstoß schießen wird. Ferner zeigt sich in den Daten, dass keiner der Schützen im Beobachtungszeitraum den Schussfuß gewechselt hat.

Tabelle 4.12: Modell 4: Binär logistische Regression der abhängigen Variable Strategiewahl des Torhüters

Konstante und Variable	Koeffizient (t-Wert)	Signifikanz	Wahrscheinlichkeit	WS-Effekt
Konstante	**0.076**	0.586	0.519	—
	(0.54)			
Schussfuß	**-0.009**	0.944	0.517	-0.002
	(-0.07)			
Heimspiel	**-0.003**	0.983	0.518	-0.001
	(-0.02)			
Halbzeit	**0.097**	0.451	0.543	0.024
	(0.75)			
Tordifferenz	**-0.044**	0.751	0.508	-0.011
	(-0.32)			
McFadden R^2	**0.0004**			
Log Likelihood	-709.2134			
N	1026			

auf die abhängige Variable aus. Allerdings ist in diesem letzten Modell auch die Konstante nicht signifikant. Zur genaueren Analyse der Signifikanzen der einzelnen Effekte wird ein weiterer Likelihood-Ratio-Test durchgeführt, dessen Ergebnisse in Tabelle 4.13 zusammengefasst sind.

Wie sich zeigt, sprechen auch die Ergebnisse des Likelihood-Ratio-Tests dafür, von der Gleichheit des Spiels bezüglich der Strategiewahl des Torhüters, ausgehen zu können, da dieser Test ebenfalls keinen signifikanten Einfluss der unabhängi-

Tabelle 4.13: Likelihood-Ratio-Tests Modell 4

Modell ohne	$\chi^2_{L(Diff)}$	Signifikanz
Schussfuß	0.01	0.9435
Heimspiel	0.00	0.9829
Halbzeit	0.57	0.4509
Tordifferenz	0.10	0.7507

gen Variablen ausweist. Die Güte des Modells ist mit McFadden's R^2=0.0004 sehr gering und auch χ^2_L=0.63 mit einem p-Wert von 0.9596 zeigt an, dass die unabhängigen Variablen die Wahrscheinlichkeit, auf die natürliche Seite zu schießen, nicht beeinflussen.
Multikollinearität stellt ebenfalls kein Problem dar, wie schon beim vorherigen Modell, das die gleichen unabhängigen Variablen beeinhaltete (Tabelle 4.11), gezeigt werden konnte.

4.2.3 Zusammenfassende Interpretation der Modelle

Allen vier berechneten Modellen ist die unabhängige Variable Schussfuß gemeinsam. Sie stellt zugleich die zentrale Variable dar, da ihre beiden Ausprägungen die beiden verschiedenen Typen von Schützen charakterisieren. Im Folgenden wird deshalb nochmals gesondert und zusammenfassend auf diese Variable eingegangen.
Modell 1 testet die Annahme, dass die Wahrscheinlichkeit einen Treffer zu erzielen für die beiden Typen von Schützen gleich groß ist. Es zeigt sich, dass sich die Trefferwahrscheinlichkeit gegenüber dem Referenzfall eines linksfüßigen Schützen um 2.6% verringert, wenn es sich beim Schützen um einen Rechtsfüßer handelt. Eine mögliche Interpretation dessen wäre, dass die Torhüter besser auf rechtsfüßige Schützen trainiert sind, da es—auch im vorliegenden Datensatz[15]— mehr rechts-

[15] $N^r_S = 666$; $N^l_S = 377$

als linksfüßige Schützen gibt. Dieser Unterschied ist jedoch weder auf dem 10%- noch auf dem 5%-Signifikanzniveau signifikant, was zur Bestätigung der Gleichheitsannahme führt.
Ziel des zweiten Modells war die Überprüfung der Voraussetzung "Gleichheit der beiden Typen von Schützen bezüglich der Strategiewahl". Auch diese Voraussetzung kann als gültig angesehen werden. Es lässt sich zwar sagen, dass sich die Wahrscheinlichkeit auf die natürliche Seite zu schießen für einen Rechtsfüßer im Gegensatz zu einem Linksfüßer (Referenzfall) um 3.5% verringert, wobei sich zeigt, dass dieser Effekt ebenfalls nicht signifikant ist. Folgt man der obigen Argumentation, könnte man vermuten, dass die rechtsfüßigen Schützen versuchen, den "Trainingseffekt" der Torhüter zu umgehen, indem sie mit geringerer Wahrscheinlichkeit die natürliche Seite R wählen.
Auch für die Torhüter wurden die Bedingungen der Gleicheit des Spiels getestet. Das Spiel sollte für die Torhüter immer das gleiche sein, egal welchem Typen von Schützen sie sich gegenüber sehen. Modell 3 beinhaltet deshalb als abhängige Variabel den Erfolg des Torhüters. Wie sich aus den Tests ergibt, ist die Wahrscheinlichkeit eines Erfolges des Torhüters bei einem rechtsfüßigen Schützen nichtsignifikant höher. Der Wahrscheinlichkeitseffekt beträgt in diesem Falle 2.6%.
Die zweite Komponente der Voraussetzungen für die Torhüter enthält, wie bei den Schützen, die Wahl der Strategie. Diese sollte vom Schussfuß des Schützen unbeeinflusst bleiben. Modell 4 bestätigt dies. Zwar ändert sich die Wahrscheinlichkeit um 0.2% jedoch ist diese Veränderung in ihrem absoluten Wert sehr gering und zudem nicht signifikant. Alle vier Annahmen bezüglich der Gleichheit des Spiels können also sowohl für die Schützen, als auch für die Torhüter als bestätigt gelten.

4.3 Test auf Gleichheit der Trefferwahrscheinlichkeiten

An dieser Stelle sollen zunächst die empirischen Payoffs, also die Trefferwahrscheinlichkeiten unter den möglichen Strategiekombinationen, dargestellt werden.

Sind die Payoffs gegeben, so lassen sich daraus die optimalen gemischten Stra-

Abbildung 4.1: Empirische Trefferwahrscheinlichkeiten

		Torhüter L	Torhüter R
Schütze	L	52.5%	96.0%
	R	87.9%	64.4%

tegien ableiten[16]. Tabelle 4.14 zeigt den Vergleich der vorhergesagten optimalen Häufigkeiten mit den tatsächlichen Häufigkeiten.

Tabelle 4.14: Vorhergesagte und tatsächliche Mischung in %

	t_L	$(1 - t_L)$	s_L	$(1 - s_L)$
vorhergesagt Häufigkeit	47.1	52.9	34.8	65.2
tatsächliche Häufigkeit	47.2	52.8	41.6	58.4

Es zeigt sich, dass die Torhüter sehr nahe am optimalen Mischungsverhältnis liegen. Die Schützen wählen jedoch, mit einer relativ geringen Differenz von sieben Prozentpunkten zur optimalen Mischung, zu oft die nicht-natürliche Seite. Insgesamt deutet dieses Ergebnis jedoch darauf hin, dass die Spieler ihre Strategie gemäß der theoretischen Vorhersage mischen.

4.3.1 Tests auf der Individualebene

Eine zentrale Hypothese des Minimax-Theorems besteht in der Gleichheit der Trefferwahrscheinlichkeit für die beiden alternativen Strategien L und R, wobei

[16] Zur Berechnung der optimalen Strategien siehe Anhang S.VII.

R in diesem Zusammenhang für die "natürliche" und L für die "nicht-natürliche" Seite steht. Formal bedeutet dies:

$$p_L^i = p_R^i = p^i, \tag{4.16}$$

wobei p_L^i für die Trefferwahrscheinlichkeit der Alternative L und p_R^i für die Trefferwahrscheinlichkeit der Alternative R steht. Diese Hypothese ist deswegen zentral, da sie die erforderliche Voraussetzung für einen sinnvollen,"gewinnbringenden" Einsatz einer gemischten Strategie beinhaltet. Es wäre schlichtweg irrational, eine der beiden Alternativen zu wählen, wenn der Spieler wüsste, dass eben diese gewählte Strategie mit einer geringeren Wahrscheinlichkeit zum Erfolg führen wird.

Zum Test der Gleichheits-Hypothese der Gewinnwahrscheinlichkeiten auf der Individualebene wird ein χ^2-goodness of fit-Test auf Gleichheit zweier Verteilungen für jeden Spieler— sowohl Schützen, als auch Torhüter—, der an mindestens 20 Elfmetersituationen beteiligt war, unter der Nullhypothese $H_0 : p_L^i = p_R^i = p^i$ durchgeführt.

Dieser Test beruht auf dem Vergleich der empirisch beobachteten Häufigkeiten mit den —bei statistischer Unabhängigkeit— zu erwartenden Häufigkeiten. Dabei misst der χ^2-Koeffizient allgemein die Abweichungen der beobachteten Häufigkeiten h_{ij} von den zu erwartenden Häufigkeiten $\tilde{h}_{ij}$ und ist durch

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \frac{(h_{ij} - \tilde{h}_{ij})^2}{\tilde{h}_{ij}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \frac{\left(h_{ij} - \dfrac{h_{i.}h_{.j}}{n}\right)^2}{\dfrac{h_{i.}h_{.j}}{n}} \tag{4.17}$$

definiert(vgl. Jann 2002). Nimmt χ^2 grosse Werte an, deutet dies auf einen Zusammenhang zwischen den Merkmalen hin. Ob nun auch in der Grundgesamtheit ein Zusammenhang besteht, wird inferenzstatistisch überprüft, wobei ein nichtsignifikantes Ergebis zur Beibehaltung der Nullhypothese führt.

An die vorliegende Fragestellung angepasst, bedeutet dies, dass die Pearson-Statistik für die Erfolgswahrscheinlichkeit

$$P^i = \sum_{j\in\{L,R\}} \left[\frac{(N_{jT}^i - n_j^i p^i)^2}{n_j^i p^i} + \frac{(N_{jD}^i - n_j^i(1-p^i))^2}{n_j^i(1-p^i)} \right] \tag{4.18}$$

asymptotisch χ^2-verteilt mit einem Freiheitsgrad ist, wenn p^i durch ihren Maximum-Likelihood-Schätzer

$$\frac{N^i_{LT} + N^i_{RT}}{n^i_L + n^i_R} \tag{4.19}$$

ersetzt wird. Dabei wird die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler erfolgreich ist, wenn er die Strategie $j \in \{L, R\}$ wählt mit p^i_j bezeichnet. n^i_j steht für die Häufigkeit, mit der Spieler i die Strategie j wählt und N^i_{jT} bzw. N^i_{jD} geben die Häufigkeiten, mit denen Spieler i erfolgreich (Treffer)[17] bzw. nicht erfolgreich[18] (Daneben, Pfosten/Latte, vom Torhüter gehalten) war —wenn er Strategie j gewählt hat— wieder (vgl. Palacios-Huerta, 2003).
Der χ^2-Test wird nur für Spieler ausgeführt, die an mehr als 20 Elfmetersituationen beteiligt waren, um die im Allgemeinen geforderten Voraussetzungen dieses Test auf Gleichheit von Verteilungen nicht zu verletzen. Um die Gleichheitshypothese der Gewinnwahrscheinlichkeiten auch für Spieler testen zu können, die an weniger als 20 Situationen beteiligt waren, wird zusätzlich der exakte Test nach Fisher durchgeführt. Tabelle 4.15 zeigt die Ergebnisse des χ^2-Tests für diejenigen Spieler, die an mehr als 20 Situationen beteiligt waren.

Da jedoch nur sechs Schützen die Bedingung der Teilnahme an mindestens 20 Elfmetersituationen erfüllen und zudem relativ häufig zwei weitere Bedingungen für die adäquate Durchführung—nämlich die Bedingungen, dass nicht mehr als 20% der Zellen einer Vierfelder-Tafel eine erwartete Häufigkeit kleiner 5 haben und keine Zelle eine erwartete Häufigkeit kleiner 1 aufweist— wird in einem

[17] Auch wenn die Indizes etwas irritierend erscheinen mögen, bedeuten die Indizes T und D ebenfalls für die Torhüter, dass Torhüter i erfolgreich (T) bzw. nicht erfolgreich (D) war, wobei ein Erfolg nur vorliegt, wenn der Torhüter den Schuss tatsächlich gehalten hat. Alle Fälle, in denen der Schütze an den Pfosten oder die Latte bzw. vorbei geschossen hat, werden nicht mit in die Berechnung der Erfolgswahrscheinlichkeit des Torhüters aufgenommen.

[18] Im Originaldatensatz stehen für den Verlauf einer Elfmetersituation zwei verschiedene Variablen (Verlauf1 und Verlauf2) zur Verfügung. Während Verlauf1 nur das primäre Ergebnis (vorbei, Pfosten/Latte, gehalten, Tor) der Situation wiedergibt, berücksichtigt Verlauf2 auch die Möglichkeit eines Nachschusses, wenn der Torhüter im primären Verlauf den Schuss gehalten hat oder der Schütze an den Pfosten/Latte getroffen hat und der Ball ins Spielfeld zurückprallt. In den folgenden Berechnungen wird nur der primäre Verlauf berücksichtigt, da nur dieser die eigentliche zu untersuchende Elfmetersituation widerspiegelt.

Tabelle 4.15: Test auf Gleichheit der Gewinnwahrscheinlichkeiten

		Mischung in %		Trefferquote in %			
Spieler	#Elfmeter	L	R	L	R	Statistik	p-Wert
Schütze 1	21	38.1	61.9	100.0	69.2	3.041	0.081*
Schütze 2	21	28.6	71.4	50.0	86.7	3.176	0.075*
Schütze 3	29	41.4	58.6	91.7	82.4	0.513	0.474
Schütze 4	21	57.1	42.9	91.7	88.9	0.460	0.830
Schütze 5	20	45.0	55.0	77.8	81.8	0.510	0.822
Schütze 6	22	31.8	68.2	100.0	80.0	1.621	0.203
Torhüter 1	40	72.5	27.5	34.5	18.2	1.009	0.315
Torhüter 2	23	52.2	47.8	16.7	9.1	0.290	0.590
Torhüter 3	33	51.5	48.5	11.8	18.8	0.313	0.576
Torhüter 4	22	31.8	68.2	28.6	6.7	1.945	0.163
Torhüter 5	26	26.9	73.1	14.3	10.5	0.071	0.790
Torhüter 6	30	50.0	50.0	26.7	13.3	0.833	0.361
Torhüter 7	23	30.4	69.6	28.6	25.0	0.032	0.858
Torhüter 8	28	42.9	57.1	33.3	25.0	0.233	0.629
Torhüter 9	45	51.1	48.9	26.1	9.1	2.222	0.136
Torhüter 10	31	51.6	48.4	6.3	20.0	1.302	0.254
Torhüter 11	37	59.5	40.5	27.3	20.0	0.256	0.613
Torhüter 12	21	47.6	52.4	30.0	27.3	0.019	0.890

Beachte: * bedeutet ein Zurückweisen der Nullhypothese auf dem 10%-Niveau
Trefferquote besagt für die Spielergruppe der Torhüter die Wahrscheinlichkeit einen Elfmeter-Schuss zu halten.

nächsten Schritt ein zusätzliches Testverfahren angewendet, das besser dafür geeignet ist, auch bei kleinen Fallzahlen ($n < 20$)[19] auf die Gleichverteilung der Gewinnwahrscheinlichkeiten über die beiden Strategien zu testen. So bietet der "exakte Test nach Fisher" [20] die Möglichkeit, die exakten Wahrscheinlichkeiten, dass sich die N Beobachtungen wie empirisch beobachtet auf die vier Merkmalskombinationen verteilen, zu berechnen. Hierbei geht der Test nicht mehr von der χ^2-Approximation aus, vielmehr wird die exakte Wahrscheinlichkeit dafür berechnet, dass die beobachteten Häufigkeiten eben diesen Grad des Zusammenhangs aufweisen, wenn nur der Zufall 'waltet' (vgl. Hays 1981). Die Null-Hypothese besagt also, dass die Verteilung der Häufigkeiten rein zufällig stattfindet bzw., dass kein Zusammenhang zwischen den betrachteten Variablen besteht.
Gegeben sei folgende Vierfelder-Tafel (Abb. 4.2) mit den zugehörigen Randverteilungen:

Abbildung 4.2: allgemeine Vierfelder-Tafel

	A_1	A_2	
B_1	a	b	$a+b$
B_2	c	d	$c+d$
	$a+c$	$b+d$	N

Werden nun die Randwahrscheinlichkeiten durch die relativen Randhäufigkeiten geschätzt, sind die Randhäufigkeiten als Parameter fixiert. Berechnet wird die Wahrscheinlichkeit, dass exakt a von den in B_1 ($= a + b$) fallenden Beobachtungen unter A_1 und exakt b Beobachtungen unter A_2 fallen, wenn sich insgesamt $a+c$ Beobachtungen unter A_1 und $b+d$ Beobachtungen unter A_2 befinden. Da die

[19]Camilli und Hopkins (1979) konnten jedoch zeigen, dass auch der χ^2-Test akkurate Ergebnisse liefert, sofern $n \geq 8$ ist, während der exakte Test nach Fisher zu sehr konservativen Ergebnissen führt.

[20]Da die Entwicklung dieses exakten Tests auf mehrere Autoren zurückgeht, wird dieser Test in der Literatur uneinheitlich auch Fishers (exakter) Test, Irwin-Fisher-Test oder Fisher-Yates-Test genannt (vgl. Bortz et al. 1990). Im Folgenden wird die Bezeichnung —in Anlehnung an die von SPSS gebrauchte Bezeichnung— "exakter Test nach Fisher" gebraucht.

Zufallsvariable a wie beim "Ziehen ohne Zurücklegen" hypergeometrisch verteilt ist, kann die Wahrscheinlichkeit $p(a)$, dass exakt a von B_1 Beobachtungen unter A_1 fallen, mit der Formel

$$p(a) = \frac{\binom{a+c}{a}\binom{b+d}{b}}{\binom{N}{a+b}} \tag{4.20}$$

berechnet werden. Dies entspricht in Fakultätenschreibweise

$$p(a) = \frac{(a+b)!\,(c+d)!\,(a+c)!\,(b+d)!}{N!\,a!\,b!\,c!\,d!}. \tag{4.21}$$

Auf Grund der konstanten Randsummen ist es hinreichend, lediglich eine Wahrscheinlichkeitsverteilung zu berechnen, da durch die Festlegung von a die restlichen drei Felder der Vierfeldertafel erschlossen werden können.
Die Überschreitungswahrscheinlichkeit P ergibt sich nach Bortz et al. (1990) nun "durch Aufsummieren aller 'extremeren' Feldverteilungen einschließlich der beobachteten Verteilung. Dabei ist darauf zu achten, dass die Randverteilungen unverändert bleiben. Als extremer gelten im Falle einer einseitigen Testung alle Verteilungen, die von der empirischen Verteilung in der unter H_1 vorausgesagten Richtung abweichen. Für die zweiseitige Testung und den Fall, dass die beiden Zeilen- bzw. Spaltensummen nicht symmetrisch sind, werden alle Verteilungen als extremer betrachtet, deren Differenzbetrag $|a/(a+b) - c/(c+d)|$ mindestens genauso groß ist wie der der tatsächlich beobachteten Verteilung. Im Falle symmetrischer Zeilen- und Spaltensummen wird die einseitige Überschreitungswahrscheinlichkeit verdoppelt (vgl. Bortz et al. 1990).
Wenn nun P größer (kleiner) als das zuvor festgelegte Signifikanzniveau α ist, wird die Nullhypothese, die ja eine zufällige Verteilung bzw. keinen Zusammenhang formulierte, beibehalten (verworfen).
Zum besseren Verständnis von Tabelle 4.16 zeigt Abbildung 4.3 eine allgemeine Darstellung einer Vierfelder-Tafel für einen Schützen:

Um eine bessere Vergleichbarkeit zwischen Torhütern und Schützen zu gewährleisten, wird auch für die Torhüter, welche ebenfalls mehrheitlich zumindest eine der Voraussetzungen des χ^2-Tests nicht erfüllen, der exakte Test nach Fischer

Abbildung 4.3: Vierfelder-Tafel für Schützen

	Strategie	
	L	R
kein Treffer	a	b
Treffer	c	d

durchgeführt.[21] Tabelle 4.16 zeigt die Ergebnisse des exakten Tests nach Fischer für die Schützen und die Torhüter.

4.3.2 Interpretation der Ergebnisse

Sowohl die Ergebnisse des χ^2-Tests als auch die des exakten Tests zeigen, dass weder für die Schützen, noch für die Torhüter die Nullhypothese, die die Gleichheit der Erfolgswahrscheinlichkeit für die beiden Strategien L und R postulierte, zurückgewiesen werden kann. Dies gilt für beide Tests auf dem 10%–, wie auch auf dem 5%–Signifikanzniveau. Allerdings sei an dieser Stelle noch einmal darauf hingewiesen, dass die Ergebnisse des exakten Tests nach Fisher die konsistenteren Ergebnisse liefert, da dieser die etwaigen Verletzungen der Voraussetzungen des χ^2-Tests besser kompensieren kann.

4.3.3 Tests auf der Aggregatebene

Geht man mit Camilli und Hopkins(1979) davon aus , dass der χ^2-Test auch bei relativ kleinen Stichproben (siehe hierzu Fußnote 20) akkurate Ergebnisse liefert, ist es möglich, einen joint-Test (vgl. Palacios-Huerta 2003) durchzuführen. Tabelle 4.17 zeigt zu diesem Zweck noch einmal die Ergebnisse des χ^2-Tests für die einzelnen Spieler, wobei in dieser Tabelle auch die Ergebnisse für die Spieler, welche an weniger als 20 aber mindestens an 15 Elfmeter-Situationen teilgenommen haben, mit aufgeführt sind. Ziel ist es, wie bei Walker und Wooders (2001) und Palacios-

[21] Dieser Test wird auch für Torhüter13 durchgeführt, welcher auf Grund einer Zellenbesetzung von Null aus dem χ^2-Test ausgeschlossen wurde.

Tabelle 4.16: Exakter Test nach Fisher

		Verteilung				
Spieler	#Elfmeter	a	b	c	d	Signifikanz
Schütze1	21	0	4	8	9	0.131
Schütze2	21	3	2	3	13	0.115
Schütze3	29	1	3	11	14	0.622
Schütze4	21	1	1	11	8	1.000
Schütze5	20	2	2	7	9	1.000
Schütze6	22	0	3	7	12	0.523
Schütze7	17	2	1	4	10	0.515
Schütze8	15	2	2	6	5	1.000
Schütze9	16	2	2	4	8	0.604
Schütze10	16	1	1	4	10	1.000
Schütze11	19	2	1	9	7	1.000
Schütze12	16	1	1	10	4	1.000
Torhüter1	40	19	9	10	2	0.451
Torhüter2	23	10	10	2	1	1.000
Torhüter3	33	15	13	2	3	0.656
Torhüter4	22	5	14	2	1	0.227
Torhüter5	26	6	17	1	2	1.000
Torhüter6	30	11	13	4	2	0.651
Torhüter7	23	5	12	2	4	1.000
Torhüter8	28	8	12	4	4	0.691
Torhüter9	45	17	20	6	2	0.243
Torhüter10	31	15	12	1	3	0.333
Torhüter11	37	16	12	6	3	0.711
Torhüter12	21	7	8	3	3	1.000
Torhüter13	21	11	9	0	1	0.476

Beachte: Es wird nur die Signifikanz für die zweiseitige Testung aufgeführt

Tabelle 4.17: χ^2-Test auf Gleichheit der Gewinnwahrscheinlichkeiten

		Mischung in %		Trefferquote in %			
Spieler	#Elfmeter	L	R	L	R	Statistik	p-Wert
Schütze 1	21	38.1	61.9	100.0	69.2	3.041	0.081*
Schütze 2	21	28.6	71.4	50.0	86.7	3.176	0.075*
Schütze 3	29	41.4	58.6	91.7	82.4	0.513	0.474
Schütze 4	21	57.1	42.9	91.7	88.9	0.460	0.830
Schütze 5	20	45.0	55.0	77.8	81.8	0.510	0.822
Schütze 6	22	31.8	68.2	100.0	80.0	1.621	0.203
Schütze 7	17	35.3	64.7	66.7	90.9	1.570	0.210
Schütze 8	15	53.3	46.7	75.0	71.4	0.024	0.867
Schütze 9	16	37.5	62.5	66.7	80.0	0.356	0.551
Schütze 10	16	31.3	68.8	80.0	90.9	0.374	0.541
Schütze 11	19	57.9	42.1	81.8	87.5	0.112	0.737
Schütze 12	16	68.8	31.3	90.9	80.0	0.374	0.541
$\sum$	233					12.131	
Torhüter 1	40	72.5	27.5	34.5	18.2	1.009	0.315
Torhüter 2	23	52.2	47.8	16.7	9.1	0.290	0.590
Torhüter 3	33	51.5	48.5	11.8	18.8	0.313	0.576
Torhüter 4	22	31.8	68.2	28.6	6.7	1.945	0.163
Torhüter 5	26	26.9	73.1	14.3	10.5	0.071	0.790
Torhüter 6	30	50.0	50.0	26.7	13.3	0.833	0.361
Torhüter 7	23	30.4	69.6	28.6	25.0	0.032	0.858
Torhüter 8	28	42.9	57.1	33.3	25.0	0.233	0.629
Torhüter 9	45	51.1	48.9	26.1	9.1	2.222	0.136
Torhüter 10	31	51.6	48.4	6.3	20.0	1.302	0.254
Torhüter 11	37	59.5	40.5	27.3	20.0	0.256	0.613
Torhüter 12	21	47.6	52.4	30.0	27.3	0.019	0.890
$\sum$	359					8.525	

Beachte: * bedeutet ein Zurückweisen der Nullhypothese auf dem 10%-Niveau

Trefferquote bedeutet für die Spielergruppe der Torhüter die Wahrscheinlichkeit einen Elfmeter-Schuss zu halten.

Huerta (2003) die joint Hypothese zu testen, dass die Daten aus den Einzelexperimenten[22] durch das Gleichgewichts-Verhalten der Spieler zustande kommen. Die Nullhypothese formuliert hier die Gleichheit der Gewinnwahrscheinlichkeiten

$$p_L^i = p_R^i \tag{4.22}$$

über alle Experimente hinweg, wobei die Parameter p_L^i und p_R^i zwischen den einzelnen Experimenten variieren dürfen. Als Teststatistik fungiert hier die Summe aller Teststatistiken aus den individuellen χ^2-Tests, welche unter der Nullhypothese χ^2-verteilt mit 24 Freiheitsgraden ist. Dieser Test kann zudem gesondert für die Schützen und auch für die Torhüter ausgeführt werden. Tabelle 4.18 fasst die Ergebnisse des Tests zusammen.

Tabelle 4.18: Pearson joint test

			kritischer Wert		Signifikanz	
	Freiheitsgrade	Wert	$\alpha = 5\%$	$\alpha = 10\%$	$\alpha = 5\%$	$\alpha = 10\%$
Alle Spieler	24	20.656	36.42	33.20	nein	nein
Schützen	12	12.131	21.03	18.55	nein	nein
Torhüter	12	8.525	21.03	18.55	nein	nein

Wie der Vergleich der tatsächlichen mit den kritischen χ^2-Werten zeigt, lässt sich kein signifikantes Ergebnis finden, was zur Beibehaltung der Nullhypothese, dass die Gewinnwahrscheinlichkeiten über beide Strategien gleich groß ist, für alle drei Gruppen führt.

Zusätzlich zu Pearsons Joint Test wird ein Kolmogorov-Smirnov Anpassungstest durchgeführt, da dieser

[22] Alle Situationen *eines* Spielers die in den individuellen χ^2-Tests getestet wurden, werden als ein Experiment aufgefasst.

> "more powerful than the Pearson joint test against many alternative hypotheses about how the data were generated"(Walker and Wooders 2001)

ist. Grundsätzlich vergleicht dieser Test eine empirische mit einer theoretischen Verteilung. Formell bedeutet dies, dass die Verteilung der Stichprobenfunktion (Kolmogorv-Statistik)

$$D = \sup_{-\infty<x<\infty} |\hat{F}_n(x) - F_0(x)| \tag{4.23}$$

unabhängig von der speziellen Verteilungsfunktion $F_0(x)$ ist, wobei $F_0(x)$ die stetige, vollständig spezifizierte Verteilungsfunktion der Zufallsvariable X darstellt und $\hat{F}_n(x)$ die empirische Verteilungsfunktion wiedergibt. Zudem gilt

$$\lim_{n\to\infty} P(\sqrt{n}D \leq z) = K(z). \tag{4.24}$$

Auf den hier gegebenen Sachverhalt angewendet, wird die Verteilung der p-Werte der einzelnen Experimente auf eine Gleich-Verteilung hin getestet. Wenn also die Daten durch das Spielen der Gleichgewichtsstrategie entstehen, so sollten die p-Werte über dem Intervall $[0,1]$ gleichverteilt sein. Mit anderen Worten, die zu den individuellen χ^2-Werten gehörigen p-Werte aus den einzelnen Experimenten sollten Zügen aus der Gleichverteilung $U[0,1]$ entsprechen. Getestet wird also die Nullhypothese

$$H_0 : F(x) = F_0(x) \tag{4.25}$$

mit

$$F_0(x) = x \qquad \text{für} \qquad 0 < x < 1. \tag{4.26}$$

Die Teststatistik ist in diesem Fall gegeben durch

$$K = \sqrt{n} \sup_{0<x<1} |\hat{F}(x) - x|. \tag{4.27}$$

Der Test wird für alle Spieler gemeinsam, und zudem für die Schützen und Torhüter getrennt berechnet. Tabelle 4.19 zeigt die Ergebnisse der jeweiligen Tests.

Für alle drei Tests ergibt sich ein nicht-signifikantes Ergebnis, was in allen drei Fällen zur Beibehaltung der Nullhypothese führt. Dies wiederum bedeutet, dass von einer Gleichverteilung der p-Werte ausgegangen werden kann.

Tabelle 4.19: Kolmogorov-Smirnov Test auf Gleichverteilung

	Statistik	p-Wert
Alle Spieler	0.760	0.611
Schützen	0.669	0.762
Torhüter	0.578	0.892

4.3.4 Interpretation der Ergebnisse

Die Hypothese, dass die Anwendung der Minimax-Strategie durch die Spieler die gegebenen Daten hervorgebracht hat, kann also sowohl für alle Spieler gemeinsam, als auch für die Schützen und Torhüter getrennt bestätigt werden.

4.4 Test auf die Serielle Unabhängigkeit der Schüsse

Neben der Gleichheit der Gewinnwahrscheinlichkeiten beider Strategien bezieht sich die zweite zentrale, testbare Hypothese auf die Zufälligkeit der gewählten Strategien. Genauer müssen die Wahlen der Strategie seriell unabhängig sein. Die Wahl der Strategie sollte also in jeder 'neuen' Elfmetersituation weder von der vorhergegangenen, noch von einer zukünftigen Entscheidung beeinträchtigt werden. Vielmehr besteht die Forderung nach Zufälligkeit der Strategiewahl. Die Nullhypothese besagt in diesem Fall, dass die einzelnen Wahlen der Strategie seriell unabhängig sind. Eine Ablehnung der Nullhypothese erfolgt, wenn die einzelnen Schützen entweder zu oft, oder zu selten ihre Strategie wechseln.

4.4.1 Test der seriellen Unabhängigkeit

Zunächst erfolgt eine kurze Darstellung des für die Individualebene angewandten Tests. Hierbei handelt es sich um eine Sequenzanalyse oder kürzer den run-Test.

> "A run is defined as a succession of identical symbols which are followed and preceeded by different symbols or by no symbols at all" (Siegel and Castellan 1988:58).

Betrachtet wird nun die Abfolge der Strategien eines Spielers i, wobei sie nach der Reihenfolge ihres Auftretens sortiert sind. Hierbei gilt

$$s^i = \{s^i_1, s^i_2 \ldots, s^i_{n^i}\}, \tag{4.28}$$

wobei $s^i \in \{L, R\}$ und $x \in [1, n^i]$ und $N = n^i_L + n^i_R$ ist. n^i_L und n^i_R bezeichnen jeweils die Anzahl der von Spieler i getroffenen Wahlen bezüglich L und R. Die Anzahl der runs in der Sequenz s^i wird mit r^i bezeichnet.
Wenn n^i_L und n^i_R große Werte (≥ 20) annehmen, kann als Approximation der Stichprobenverteilung der runs die Normalverteilung angenommen werden[23]. Sie ist gekennzeichnet durch den Mittelwert

$$\mu_r = \frac{2n^i_L n^i_R}{N} + 1 \tag{4.29}$$

und die Standardabweichung

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{2n^i_L n^i_R (2n^i_L n^i_R - N)}{N^2(N-1)}}. \tag{4.30}$$

Die Nullhypothese, dass sich die Abfolge der gewählten Strategien in zufälliger Reihenfolge ergibt, kann nun durch

$$z = \frac{r^i - \mu_r}{\sigma_r} = \frac{\dfrac{r^i + h - 2n^i_L n^i_R}{N-1}}{\sqrt{\dfrac{[2n^i_L n^i_R(2n^i_L n^i_R - N)]}{[N^2(N-1)]}}} \tag{4.31}$$

gestestet[24] werden, wobei $h = +0.5$ wenn $r^i < 2n^i_L n^i_R/N - 1$ und $h = -0.5$ wenn $r^i > 2n^i_L n^i_R/N - 1$. Durch die Eigenschaft der Standard-Normalverteilung der Werte von z, gibt der zugehörige p-Wert die Wahrscheinlichkeit wieder, diesen

[23] Bei den folgenden Ergebnissen des run-Tests wurde eine Kontinuitätskorrektur mitberechnet, da nicht alle Fälle die Forderung der großen n^i erfüllen

[24] Hierbei handelt es sich um einen zweiseitigen Test, da sowohl zu viele, als auch zu wenige runs eine nicht-zufällige Wahl bedeuten.

oder einen extremeren Wert von z zu erhalten, wenn die H_0(Zufälligkeit) wahr ist. Tabelle 4.20 zeigt die Ergebnisse des run-Tests für die einzelnen Spieler[25].

Diese Tabelle enthält als zusätzliche Information die unter H_0 zu erwartende Anzahl von runs, welche durch $\mu_r = \frac{2n_L^i n_R^i}{N} + 1$ berechnet wird, wobei die in der Tabelle angezeigten Werte gerundete Werte sind.
Es zeigt sich, dass in zwei Fällen (Schütze 1 und Torhüter 11) die H_0 der seriellen Unabhängigkeit auf dem 10%-Niveau verworfen werden muss. Sowohl im Falle des Schützen, als auch bei dem betroffenen Torhüter handelt es sich um eine negative serielle Korrelation, was zur Folge hat, dass diese beiden Spieler die Strategien zu oft wechseln, um noch von der Zufälligkeit der Strategiewahl ausgehen zu können. Für alle anderen Spieler kann gezeigt werden, dass ihre Aktionen seriell unabhängig aufeinanderfolgen. Die Zufälligkeit der Strategiewahl ist also für diese Spieler gewährleistet.

Ergänzend zum run-Test wird ein weiteres Verfahren angewendet, um die serielle Unabhängigkeit der Schüsse eines Schützen, bzw. die Richtung in die ein Torhüter springt, zu untersuchen. Hierbei handelt es sich abermals um das Verfahren der logistischen Regression. In diesem Zusammenhang stellt wiederum die Wahrscheinlichkeit, auf die natürliche Seite zu schießen, bzw. zu springen die dichotome abhängige Variable dar. Als unabhängige Variablen fungieren bei diesem Verfahren jedoch sog. lag-Variablen. Diese sind Variablen, welche den Wert der Variable zu einem früheren Zeitpunkt wiedergeben. Allgemein lässt sich die Gleichung einer Regression mit lagged-Variablen folgendermaßen darstellen

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + \gamma Y_{t-1} + u_t \tag{4.32}$$

In diesem Falle handelt es sich um ein dynamisches Modell, da neben den 'normalen' unabhängigen Variablen auch frühere (lagged) Werte der abhängigen Variable als Prädiktorvariable mit in das Modell aufgenommen werden (vgl. Gujarati 1995).
Für die vorliegende Fragestellung wird der Zusammenhang folgendermaßen mo-

[25] Für die Torhüter sind nur Situationen berücksichtigt, in denen sie sich entweder für L oder R entschieden haben.

Tabelle 4.20: Ergebnisse des run-Tests

	n_L^i	n_R^i	N	erwartete runs	runs	z	p-Wert
Schütze 1	8	13	21	11	14	1.71	0.09*
Schütze 2	6	15	21	10	10	0.52	0.61
Schütze 3	12	17	29	15	12	-1.00	0.32
Schütze 4	12	9	21	11	13	1.01	0.31
Schütze 5	9	11	20	11	14	1.67	0.09
Schütze 6	7	15	22	11	11	0.48	0.63
Schütze 7	6	11	17	9	11	1.51	0.13
Schütze 8	8	7	15	8	10	1.09	0.27
Schütze 9	6	10	16	8	9	0.55	0.58
Schütze 10	5	11	16	8	10	1.60	0.11
Schütze 11	11	8	19	10	8	-0.86	0.39
Schütze 12	11	5	16	8	8	0.38	0.70
Torhüter 1	29	11	40	17	16	-0.18	0.86
Torhüter 2	12	12	24	13	11	-0.63	0.53
Torhüter 3	18	18	36	19	22	1.18	0.24
Torhüter 4	7	17	24	11	10	-0.21	0.83
Torhüter 5	9	19	27	12	10	-0.83	0.40
Torhüter 6	15	18	33	17	21	1.48	0.14
Torhüter 7	7	16	23	11	9	-0.63	0.53
Torhüter 8	12	16	28	15	13	-0.48	0.63
Torhüter 9	23	24	47	24	23	-0.29	0.77
Torhüter 10	17	16	33	17	14	-1.06	0.29
Torhüter 11	25	18	43	22	27	1.77	0.08*
Torhüter 12	10	11	21	11	10	-0.44	0.66
Torhüter 13	11	10	21	11	11	0.01	0.99

Beachte: * bedeutet Ablehnung der H_0 auf dem 10%-Niveau.

Die Anzahl der unter H_0 erwarteten runs ergibt sich aus gerundeten Werten.

Es wurde eine Kontinuitäskorrektur für kleine Fallzahlen durchgeführt.

delliert:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 lag1(R) + \beta_2 lag1(E) + \gamma_1 R_G \tag{4.33}$$

Hierbei ist $lag1(R)$ ein lagged-Variable, die angibt welche Strategie der Spieler in der letzten Situation gewählt hat, $lag1(E)$ gibt an, ob der Spieler in der letzten Situation erfolgreich war und R_G ist ein Indikator für die Wahl des Gegners in der gegenwärtigen Situation.
Diese drei Variablen werden in das Modell aufgenommen, um zu zeigen, ob die vorhergegangene Wahl die gegenwärtige Wahl beeinflusst, ob eine erfolgreiche vorhergegangene Strategiewahl die akute Wahl beeinflusst[26] und ob die (gleichzeitige) Wahl des Gegners die Wahl des Spielers beeinflusst. Bei serieller Unabhängigkeit sollte die vergangene Wahl keinen Effekt auf die akute Wahl haben. Ebenso sollten die beiden anderen Variablen die Wahl der Strategie nicht beeinflussen. Die zu testende Nullhypothese besagt also

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \gamma_1 = 0 \tag{4.34}$$

Der Referenzfall ist ein Schütze, der beim letzten Elfmeter die nicht-natürliche Seite gewählt hat, dabei keinen Erfolg hatte und dessen Gegner in der aktuellen Situation die nicht-natürliche Seite wählt. Tabelle 4.21 zeigt die Ergebnisse der logistischen Regression für die Schützen und Torhüter.

Tabelle 4.22 gibt die Ergebnisse der Likelihood-Ratio-Tests auf die Signifikanz der Koeffizienten beider Spielergruppen wieder.

4.4.2 Zusammenfassende Interpretation

Sowohl für die Schützen, als auch für die Torhüter verringert sich die der logistischen Regression zu Grunde gelegte Fallzahl[27]. Dennoch zeigen sowohl der

[26]Es wäre möglich, dass eine vorhergegangene Wahl die zu einem Erfolg (Tor) führte, den Spieler dahingehend beeinflusst, diese Strategie beizubehalten.

[27]Dies ist der Fall da bei der Berechnung für die Schützen zum einen alle Fälle, die nur einen Elfmeter geschossen haben, zum anderen alle Torhüter, die die Strategie 'Mitte' gewählt haben,

Tabelle 4.21: Binär logistische Regression mit lagged Variablen, der abhängigen Variable Strategiewahl

	Koeffizienten (Wald-Test)			
	Kons.	$lag1(R)$	$lag1(E)$	R_G
Schützen	0.409 (0.052)	0.041 (0.783)	-0.107 (0.578)	-0.066 (0.654)
Torhüter	0.104 (0.432)	0.162 (0.235)	0.118 (0.480)	-0.135 (0.329)

Beachte: $N_S = 766$; $N_T = 867$

Wald-Test für die einzelnen Effekte, als auch der Likelihood-Ratio-Test für die einzelnen aufgenommenen Variablen des Modells, dass weder die in der vorangegangenen Situation gewählte Strategie, noch ein Erfolg in der vorangegangenen Situation die aktuelle Wahl beeinflussen. Ein 'Verweilen' bei einer erfolgreichen Strategie kann also nicht festgestellt werden. Ebenso weisen die Ergebnisse die etwaige Vermutung zurück, die gegnerische Strategie könnte die Wahl der 'eigenen' Strategie beeinflussen[28].

Auf der Individual-Ebene bestätigen die run-Tests die Nullhypothese, welche die serielle Unabhängigkeit der einzelnen Wahlen eines Spielers postuliert. Allerdings

nicht berücksichtigt werden. Es ergibt sich eine Fallzahl von $N_S = 766$.

Bei den Torhütern werden nur diejenigen Fälle herangezogen, die an mehr als einer Situation beteiligt waren, und nicht die 'Mitte' gewählt haben, was zu einer Aufnahme von $N_T = 867$ Fällen führt.

[28] Grundsätzlich wird davon ausgegangen, dass die beiden Spieler simultan wählen. Dennoch könnte es sein, dass sich einer der beiden Spieler beispielsweise durch eine bestimmte Körperbewegung 'verrät', was sein Gegner versuchen wird auszunutzen.

Tabelle 4.22: Likelihood-Ratio-Tests

	Wahrscheinlichkeit ($\chi^2_{L(Diff)}$)		
	$lag1(R)$	$lag1(E)$	R_G
Schützen	0.783 (0.08)	0.577 (0.31)	0.654 (0.20)
Torhüter	0.234 (1.41)	0.479 (0.50)	0.328 (0.95)

Beachte: $N_S = 766$; $N_T = 867$

muss für zwei Spieler (Schütze1 und Torhüter 11) die H_0 auf dem 10%-Niveau verworfen werden, weil beide ihre Strategien —unter dem Gesichtspunkt der Zufälligkeit— zu oft wechselten. Dies jedoch entspricht der auf diesem Niveau zu erwartenden Anzahl von Zurückweisungen.

Kapitel 5

Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Kapitel sollen die zentralen Ergebnisse der Arbeit nocheinmal kurz zusammengefasst werden und zudem ein Ausblick auf mögliche weiterführende Forschungsfragen gegeben werden.

Zusammenfassung der Ergebnisse

Die dieser Arbeit übergeordnete Frage widmet sich dem Verhalten von Akteuren in strategischen Situationen. Hierbei wird im speziellen untersucht, wie sich die Akteure in Situationen verhalten, in denen zum einen keine Kommunikation untereinander möglich ist und zum anderen die Interessen der Spieler völlig konträr zueinander gelagert sind. Eben solchen strategischen Situationen widmet sich die Spieltheorie. Mit ihrer Hilfe soll das Verhalten rationaler (nutzenmaximierender) Akteure erkundet werden. Hierzu bedient sie sich der Bildung von Modellen, um reale Situationen abstrakt abbilden zu können.
In dieser Arbeit wird eine Situation aus dem professionellen Sport modelliert. Es handelt sich um das Elfmeterschießen im Fußball. Dieses reale Spiel eignet sich im besonderen für eine spieltheoretische Analyse, da seine Regeln relativ einfach sind und auch die Möglichkeiten der Spieler klar eingeschränkt sind. Es erfordert also keine allzu großen Vereinfachungen um es einer abstrakten Analyse zugänglich zu machen.
Das Elfmeterschießen stellt im Sinne der Spieltheorie ein Nullsummen-Spiel dar.

John von Neumann (1928) konnte zeigen, dass Spiele dieser Art ins Gleichgewicht gebracht werden können, wenn es den Spielern erlaubt ist, gemischte Strategien anzuwenden.
Die Theorie des Gleichgewichts in gemischten Strategien beinhaltet nun zwei Hypothesen, die in dieser Arbeit anhand von Daten aus der ersten deutschen Fußball-Bundesliga empirisch untersucht werden.

Zunächst mussten jedoch einige Annahmen, die zur Modellierung des Spiels getroffen wurden überprüft werden. So sollte gewährleistet sein, dass die Schützen das gleiche Spiel spielen, egal um welchen Spielertyp (Links- oder Rechtsfüßer) es sich handelt. Auch die Torhüter sollten, in Bezug auf ihre Strategiewahl, immer das gleiche Spiel vor sich haben, egal mit welchem Fuß der Schütze den Elfmeter schießt. Diese Annahmen konnten ohne Ausnahmen bestätigt werden.

Auf die erfolgreiche Überprüfung der Annahmen folgt die Testung der beiden zentralen Hypothesen, die sich aus der theoretischen Herleitung des Gleichgewichts in gemischten Strategien ableiten lassen.
Die erste Hypothese fordert, dass die Erfolgswahrscheinlichkeiten des Schützen so wie des Torhüters für die beiden Strategien (Links und Rechts) gleich groß sind. Diese Hypothese wird sowohl auf der Aggregatebene, als auch auf der Individualebene getestet.
Auf der Aggregatebene zeigt sich, dass die Trefferwahrscheinlichkeiten bei den Schützen über beide Strategien gleich groß sind. Auch die Torhüter haben bei den beiden Strategien die ihnen zur Verfügung stehen gleich große Erfolgswahrscheinlichkeiten. Werden alle Spieler gemeinsam betrachtet, so zeigt sich auch hier, dass sich die Erfolgswahrscheinlichkeiten der einzelnen Strategien nicht signifikant unterscheiden.
Wird die Hypothese der Gleichheit der Erfolgswahrscheinlichkeiten auf der Individualebene getestet, so ergibt sich für zwei Schützen, dass sich die Erfolgswahrscheinlichkeit der beiden Strategien auf dem 10%-Niveau signifikant unterscheiden. Für alle anderen Spieler kann die Gleichheit der Erfolgswahrscheinlichkeiten bestätigt werden.
Geht man davon aus, dass die Spieler optimalerweise gegenseitig unberechbar

sein sollten, so ergibt sich die Hypotese der seriellen Unabhängigkeit der Strategiewahl. Auch diese Hypothese wird sowohl auf der Aggregat-, als auch auf der Individualebene getestet.
Es kann gezeigt werden, dass die Spieler keine Tendenzen haben, bei einer zuvor erfolgreichen Strategie zu verweilen, oder sich durch die Wahl des Gegners beeinflussen zu lassen. Für die einzelnen Spieler wurde zudem analysiert, ob ihre Strategiewahlen zufällig aufeinander folgten. Dies kann für einen Schützen und einen Torhüter nicht angenommen werden, während bei den übrigen Spielern von einer zufälligen Wahl ausgegangen werden kann.
Zusammenfassend kann gesagt werden, dass sich die untersuchten professionellen Fußballspieler, wie von der Theorie vorhergesagt, optimal verhalten.

Diskussion und Ausblick

Einschränkend soll an dieser Stelle angeführt werden, dass folgende Faktoren einen Einfluss auf die erzielten Ergebnisse ausgeübt haben könnten.

Auf der Individualebene liegt für einzelne Spieler nur eine relativ geringe Anzahl von Beobachtungen vor. Dies kann zu Verzerrungen der Ergebnisse einiger der angewandten statistischen Testverfahren führen. Aus diesem Grund wurde in kritischen Fällen eine Kontinuitätskorrektur mitberechnet und gesondert darauf hingewiesen. Dennoch könnte eine größere Zahl von Beobachtungen für die einzelnen Spieler zu besser abgesicherten Ergebnissen führen.
Zudem erfüllten nur insgesamt 25 Spieler (12 Schützen und 13 Torhüter) die Mindestanforderung von 15 Beobachtungen pro Spieler.
Ein anderer Faktor, der sich auf die Ergebnisse ausgewirkt haben könnte, besteht darin, dass nicht berücksichtigt wurde, ob die gleichen Spieler mehrmals aufeinander trafen. So könnte es sein, dass Lerneffekte auftreten, die sich unbeobachtet auf das Verhalten der Akteure auswirken.
Trotz der genannten Schwächen kann jedoch für die untersuchten Spieler festgestellt werden, dass sie die theoretischen Forderungen erfüllen können. Es kann also empirisch gezeigt werden, dass Akteure sich außerhalb von experimentellen

Umgebungen rational verhalten.

In dieser Arbeit wurden professionelle Fußballspieler untersucht. Ihnen wurde unterstellt, dass sie die technischen Fähigkeiten besitzen, jede erforderliche Aktion ausführen zu können. Dies mag zu einem großen Teil zur Bestätigung der Hypothesen beitragen.
Sowohl aus theoretischer, als auch aus empirischer Sicht wäre es jedoch ebenfalls von Bedeutung zu ergründen, ob es auch nicht-professionellen Akteuren möglich ist, sich gemäß den theoretischen Vorhersagen optimal zu verhalten. Hierzu könnten beispielsweise Daten aus dem Amateurfußball gesammelt und einer, der vorliegenden Arbeit ähnlichen, Analyse zugeführt werden.

Literaturverzeichnis

Amann, E. (1999): *Evolutionäre Spieltheorie.* Heidelberg: Physica-Verlag.

Backhaus, K., B. Erichson, W. Plinke und R. Weiber (2000): *Multivariate Analysemethoden.* Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 9. Aufl.

Bakan, P. (1960): Response-Tendencies In Attempts To Generate Random Binary Series. *The American Journal of Psychology* 73, 127-131.

Bortz, J., G.A. Lienert und K. Boehnke (1990): *Verteilungsfreie Methoden in der Biostatistik.* Berlin, Heidelberg, New York: Springer.

Brown, J.N. und R.W. Rosenthal (1990): Testing The Minimax Hypotheses: A Re-Examination of O'Neill's Game Experiment. *Econometrica* 58, 1065-1081.

Camilli, G. und K.D. Hopkins (1979): Testing for association in 2×2 contingency tables with very small sample sizes. *Psychological Bulletin.* 86, 1011-1014.

Chiappori, P.-A., S.Levitt and T.Groseclose (2002): Testing Mixed-Strategy Equilibria When Players Are Heterogeneous: The Case of Penalty Kicks in Soccer. *American Economic Review* 92, 1138-1151.

Davis, M.D. (1993): *Spieltheorie für Nichtmathematiker.* München: Oldenbourg.

Dixit, A. und S. Skeath(2002): *Games of Strategy.* New York, London: W.W.Norton& Company.

Erev, I. und A.E. Roth (1998): Predicting How People Play Games: Reinforcement Learning in Experimental Games with Unique, Mixed Strategy Equilibria. *American Economic Review,* 88: 848-881.

Friedman, J.W. (1991): *Game Theory with Applications to Economics.* New York, Oxford: Oxford University Press.

Gujarati, D.N. (1995): *Basic Econometrics.* New York u.a.: McGraw-Hill.

Hays, W.L. (1981): *Statistics.* New York: CBS College Publishing, 3.Aufl.

Holler, M.J. und G. Illing (2000): *Einführung in die Spieltheorie.* Berlin, Heidelberg u.a.: Springer, 4.Aufl.

Hosmer, D.W. und S. Lemeshow (1989): *Applied Logistic Regression.* New York u.a.: Wiley&Sons.

Jann, B. (2002): *Einführung in die Statistik.* München: Oldenbourg.

Kohler, U. und F. Kreuter (2001): *Datenanalyse mit Stata.* München; Wien: Oldenbourg.

Luce, R.D. und H. Raiffa (1957): *Games and Decisions.* New York, London, Sydney: Wiley & Sons.

Myerson, R.B. (2002): *Game Theory.* Cambridge, Massachusets; London, England: Harvard University Press.

Nash, J.F. (1950): Equilibrium Points In N-Person Games. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 36: 48-49.

O'Neill, B. (1987): Nonmetric test of the minimax theory of two-person zerosum games.*Proceedings of the National Academy of Sciences* 84:2106-2109.

Palacios-Huerta, I. (2003): Professionals Play Minimax. *Review of Economic Studies* 70: 395-415.

Rapoport, A., D.G. Gordon und M.J. Guyer (1976): *The* 2×2 *Game.* Ann Arbor: University of Michigan Press.

Rapoport, A. (1989): *Decision Theory and Decision Behaviour.* Dordrecht u.a.: Kluwer Academic Publications .

Rath, G.J. (1966): Randomization By Humans. *The American Journal of Psychology* 79: 97-103.

Shubik, M. (1982): *Game Theory in the Social Sciences.* Cambridge, MA, London: The MIT Press.

Sieg, G. (2005): *Spieltheorie.* München, Wien: Oldenbourg, 2.Aufl.

Siegel, S. und N.J. Castellan (1988): *Nonparametric Statistics.* New York u.a: McGraw-Hill Book Company.

Von Neumann, J. (1928): Zur Theorie der Gesellschaftsspiele. *Mathematische Annalen* 100, 295-320.

Von Neumann, J. und O. Morgenstern (1955): *Theory of games and economic behavior.* Princeton: Princeton University Press.

Wagenaar, W.A. (1972): Generation of random sequences by human subjects: a critical survey of literature.*Psychological Bulletin* 77: 65-72.

Walker, M. und J.Wooders (2001): Minimax Play at Wimbledon.*American Economic Review* 91: 1521-1538.

Zagare, F.C.(1984): *Game Theory.* Beverly Hills, London, New Delhi: Sage Publications.

Anhang

Spiel mit Gleichgewichtspunkt

Existiert in einem Nullsummen-Spiel ein (oder mehrere) Gleichgewichtspunkt(e), so gibt es eine Strategienkombination $(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0})$, die das Spiel ins Gleichgewicht bringt, wenn gilt

$$a_{i_0 j_0} = \max_i a_{i j_0} = \min_j a_{i_0 j},$$

wenn also der Matrix-Eintrag $a_{i_0 j_0}$ gleichzeitig das Maximum der Spalte j_0 und das Minimum der Zeile i_0 darstellt.
Gibt es mehrere Gleichgewichtspunkte und -Strategienkombinationen$(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0})$,$(\alpha_{i_1}, \beta_{j_1})$ so kann gezeigt werden, dass auch die Kombinationen $(\alpha_{i_0}, \beta_{j_1})$ und $(\alpha_{i_1}, \beta_{j_0})$ im Gleichgewicht sind. Zudem gilt:

$$a_{i_0 j_0} = a_{i_1 j_1} = a_{i_0 j_1} = a_{i_1 j_0}.$$

Da die Spieler im Nullsummen-Spiel entgegengesetzte Interessen verfolgen und hierbei ihren eigenen Nutzen maximieren wollen, ist es beiden Spielern möglich sich zumindest das Sicherheits-Level zu sichern. Dieses ergibt sich aus dem 'gemeinsamen' Kalkül des einen Spielers, der versucht seine Auszahlung zu maximieren, während der andere Spieler versucht, diese Auszahlung möglichst gering zu halten. Das Sicherheits-Level der Strategie a_i ist durch $\min_j a_{ij}$ gegeben. Die Gleichgewichtsstrategie α_{i_0} hat die Eigenschaft, dass sie das Sicherheits-Level maximiert:

$$\min_j a_{i_0 j} \quad = \quad a_{i_0 j_0}$$

und

$$\max_i(\min_j a_{ij}) \quad = \quad a_{i_0 j_0}$$

Die Strategie α_{i_0} wird Maximin-Strategie genannt, da i_0 das Minimum $\min_j a_{ij}$ über i maximiert (vgl. Luce&Raiffa 1957:67).
Analog hierzu gibt es auch für die Strategie β_j ein Sicherheits-Level, das durch $\max_i a_{ij}$ gegeben ist. Um nun das beste Ergebnis zu erzielen, sollte β_j so gewählt werden, dass $\max_i a_{ij}$ minimiert wird. Dies kann durch die Wahl der Gleichgewichtsstrategie β_{j_0} erreicht werden, da diese das Sicherheits-Level

$$\begin{aligned} \max_i a_{ij_0} &= a_{i_0 j_0} \\ \text{und damit} & \\ \min_j(\max_i a_{ij}) &= a_{i_0 j_0} \end{aligned}$$

bereithält. Strategie β_{j_0} wird demzufolge Minimax-Strategie genannt.
Wird also die Gleichgewichtskombination $(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0})$ gespielt, dann gilt

$$\max_i a_{ij_0} = \min_j(\max_i a_{ij}) = \max_i(\min_j a_{ij}) = \min_j a_{i j_0} = a_{i_0 j_0}.$$

> "To summarize, an equilibrium strategy not only attains the best security level for player 1 but it is also good against that strategy of player 2 which attains his best security level"(Luce&Raiffa 1957:67).

Spiel ohne Gleichgewichtspunkt

Gegeben sei folgendes Spiel[1]:

Abbildung 5.1: Spiel ohne Gleichgewichtspunkt

	β_1	β_2
α_1	3	1
α_2	2	4

Wenn Spieler 1 α_2 wählt, und damit sein bestmögliches Safety-Level von 2 erreicht, während Spieler zwei durch die Wahl von β_1 mit 3 sein höchstes Safety-Level erreicht, wobei β_1 zudem noch beste Antwort auf α_2 ist, so verstärkt dies Spieler 1s Annahme, dass Spieler2 β_1 spielen wird. Auf β_1 wäre es jedoch für Spieler1 besser, mit α_1 zu reagieren. Dies wiederum würde zu einer Wahl von β_2 durch Spieler2 führen usw... . Dieses Spiel hat also keine Lösung in reinen Strategien, da sich die Spieler bei der Wahl ihrer Strategie immer wieder im Kreise drehen.

[1]Entnommen aus Luce&Raiffa 1957:69

Berechnung der optimalen Mischung

Gegeben sei das folgende Spiel:

Abbildung 5.2: Elfmeterschießen in Normalform

		Torhüter	
		L	R
Schütze	L	(π_{LL})	(π_{LR})
	R	(π_{RL})	(π_{RR})

Geht man davon aus, dass dieses Spiel ein Gleichgewicht in gemischten Strategien besitzt und v sei der Wert dieses Spiels, dann muss gleichzeitig gelten:

$$\begin{aligned} \pi_{LL}(q) + \pi_{LR}(1-q) &\geq v, & \pi_{LL}(p) + \pi_{RL}(1-p) &\leq v, \\ \pi_{RL}(q) + \pi_{RR}(1-q) &\geq v, & \pi_{LR}(p) + \pi_{RR}(1-p) &\leq v, \\ 0 \leq q &\leq 1, & 0 \leq p &\leq 1. \end{aligned}$$

p und $(1-p)$ stellen die Wahrscheinlichkeiten der gemischten Strategie des Schützen dar. Analog geben q und $(1-q)$ die Wahrscheinlicheiten der gemischten Strategie des Torhüters an.

Werden diese Ungleichungen nach p und q aufgelöst, ergeben sich die optimalen Wahrscheinlichkeiten.

Ehrenwörtliche Erklärung

Ich erkläre hiermit ehrenwörtlich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig angefertigt habe; die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht.

München, 4. Januar 2006

(Rupert Hammer)